ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΕΣ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΕΣ 2.

Η διακριτική ικανότητα (σφάλμα ανάγνωσης)

Οι μετρητικές διατάξεις έχουν επίσης μια ανάλυση (αναφέρεται και ως σφάλμα ανάγνωσης του οργάνου).

Το σφάλμα ανάγνωσης είναι η ελάχιστη διακρίσιμη διαφορά την οποία μπορεί να ανιχνεύσει μια μετρητική διάταξη (συμπεριλαμβανομένης της τεχνικής).

Για μια απλή μέτρηση μήκους με ένα κανόνα, η διακριτική ικανότητα είναι πιθανώς το 1 mm. Για να καταλάβετε τη σημαίνει τεχνική, σκεφθείτε ότι αν χρησιμοποιήσετε μεγεθυντικό φακό θα μπορείτε να διακρίνετε μέχρι και δέκατα του χιλιοστού με το μάτι. Έτσι θα έχετε διακριτική ικανότητα 0,1mm χρησιμοποιώντας τον ίδιο κανόνα.

Σημαντική παρατήρηση.

Οι αβεβαιότητες μειώνονται με την επανάληψη των μετρήσεων, αλλά δε μπορεί ποτέ να γίνουν μικρότερες από τη διακριτική ικανότητα που μας παρέχει η τεχνική.

Μετρήσεις με αναλογικά και ψηφιακά όργανα

Για να κάνετε μια ακριβή μέτρηση μην προσπαθήσετε να διαβάσετε το μισό ή κάποιο κλάσμα μιας υποδιαίρεσης ενός αναλογικού οργάνου, αφού η ακρίβεια του οργάνου συνήθως δεν είναι καλύτερη από την μικρότερη υποδιαίρεση της κλίμακάς του. Επίσης όταν κάνετε μετρήσεις με ψηφιακά όργανα, θα πρέπει να παίρνετε ως σφάλμα ανάγνωσης μια μονάδα στο τελευταίο ψηφίο της ένδειξης του οργάνου. Για παράδειγμα αν η ένδειξη είναι 2,53 θα πρέπει να θεωρείτε ως σφάλμα ανάγνωσης $\pm$ 0,01

Διάδοση σφαλμάτων

Όταν βάζετε τις μετρήσεις σας σε ένα τύπο προκειμένου να υπολογίσετε κάποιο φυσικό μέγεθος ποιο θα είναι το σφάλμα στην τιμή του μεγέθους αυτού; Για παράδειγμα, αν θέλετε να υπολογίσετε το μαγνητικό πεδίο μετρώντας τη δύναμη σε ευθύγραμμο ρευματοφόρο αγωγό από τη σχέση $B = \frac{F}{IL}$. Αν υπάρχει 7% αβεβαιότητα στο ρεύμα *I* , 2% αβεβαιότητα στη δύναμη *F* και 1% αβεβαιότητα στο μήκος *L*, ποια θα είναι η αβεβαιότητα για το μαγνητικό πεδίο *B*;

Πρόσθεση ή αφαίρεση μετρήσεων:

Αν προσθέσετε ή αφαιρέσετε δύο μετρήσεις, η **απόλυτη** αβεβαιότητα στο αποτέλεσμα ισούται με το άθροισμα (ποτέ με τη διαφορά) των απολύτων αβεβαιοτήτων των επιμέρους μετρήσεων.
Για παράδειγμα αν ένα άλογο έχει μήκος $(2{,}2\pm 0{,}2)$m και ρυμουλκεί ένα καρότσι με μήκος $(3{,}1\pm 0{,}2)$m το συνολικό μήκος είναι $(5{,}3\pm 0{,}4)$m. Ομοίως αν το ύψος ενός διώροφου κτιρίου είναι $(8{,}3\pm 0{,}2)$m και το ύψος του πρώτου ορόφου είναι $(3{,}1\pm 0{,}1)$m, τότε η ταράτσα σε σχέση με τον πρώτο όροφο θα βρίσκεται σε ύψος $(5{,}2\pm 0{,}3)$m. Ακόμα και στη δεύτερη περίπτωση δεν αφαιρούμε αλλά προσθέτουμε τις αβεβαιότητες. Αυτός ο κανόνας αυτός είναι αρκετά καλός για τα περισσότερα πειράματα. Εξάλλου είναι καλύτερο να υπερεκτιμάτε τις αβεβαιότητες στα αποτελέσματά σας.
Αν όμως απαιτείται μια πιο προσεκτική ανάλυση σφαλμάτων, τότε αν:

$$x=y+z \quad \text{ή} \quad x=y-z$$

η αβεβαιότητα για το x είναι: $\delta x = \sqrt{\delta y^2 + \delta z^2}$

Πολλαπλασιασμός ή διαίρεση μετρήσεων:

Αν πολλαπλασιάζετε ή διαιρείτε δύο μετρήσεις, η **σχετική** αβεβαιότητα στο αποτέλεσμα ισούται με το άθροισμα (ποτέ με τη διαφορά) των σχετικών αβεβαιοτήτων των επιμέρους μετρήσεων.
Για παράδειγμα αν η ταχύτητα ενός αυτοκινήτου είναι 30km/h $\pm 10\%$, και η χρονική διάρκεια της κίνησής του είναι 6h$\pm 2\%$, η σχετική αβεβαιότητα για την απόσταση που διένυσε είναι 12%. Σημειώστε ότι μια συνέπεια του κανόνα αυτού είναι ότι αν μια μέτρηση, με σχετική αβεβαιότητα a% υψωθεί στο τετράγωνο (πολλαπλασιαστεί με τον εαυτό της), η σχετική αβεβαιότητα του τετραγώνου της μέτρησης θα είναι 2a% δηλαδή διπλασιασμένη. Ομοίως αν η σχετική αβεβαιότητα για τη μέτρηση του μεγέθους L είναι a%, η σχετική αβεβαιότητα για το μέγεθος L^n είναι na%. Σημειώστε ότι ενώ η τετραγωνική ρίζα (n=1/2) υποδιπλασιάζει τη σχετική αβεβαιότητα, το αντίστροφο τετράγωνο (n= -2) την διπλασιάζει.

Τώρα μπορείτε να απαντήσετε στο ερώτημα για το μαγνητικό πεδίο που αναφέραμε προηγουμένως. Τα τρία σχετικά σφάλματα (στο μήκος, τη δύναμη και το ρεύμα) θα πρέπει να τα προσθέσετε για να βρείτε το σχετικό σφάλμα για το μαγνητικό πεδίο B, το οποίο θα είναι 10%.

Ποιο συνοπτικά αν: $z=xy$ ή $z=\frac{x}{y}$ τότε $\frac{\Delta z}{z} = \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{y}\right)^2}$

Για εκθετικές μορφές:

Αν $z = x^n$ τότε $\frac{\Delta z}{z} = n\frac{\Delta x}{x}$

Συνοπτικός πίνακας αβεβαιοτήτων για έμμεσες μετρήσεις

Έστω *x* και *y* τιμές των ανεξάρτητων μεταβλητών που μετρήθηκαν με αβεβαιότητες Δx και Δy. Έστω επίσης *a* μια αυθαίρετη εξωτερική σταθερή παράμετρος και *z* η εξαρτημένη μεταβλητή της οποίας η τιμή πρέπει να καθοριστεί. Η αβεβαιότητα, Δz, στην τιμή της *z* μπορεί να προκύψει χρησιμοποιώντας στατιστικές μεθόδους μερικές από τις οποίες παρουσιάζουμε παρακάτω:

ΕΞΑΡΤΗΣΗ	ΑΒΕΒΑΙΟΤΗΤΑ	ΕΞΑΡΤΗΣΗ	ΑΒΕΒΑΙΟΤΗΤΑ
$z = xy$ και $z = \frac{x}{y}$	$\Delta z = z\sqrt{\left(\frac{\Delta x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{y}\right)^2}$ ή $\Delta z = z\left(\frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y}\right)$	$z = xy^a$	$\Delta z = z\sqrt{\left(\frac{\Delta x}{x}\right)^2 + \left(a\frac{\Delta y}{y}\right)^2}$ ή $\Delta z = z\left(\frac{\Delta x}{x} + a\frac{\Delta y}{y}\right)$
$z = x^a$	$\Delta z = za\frac{\Delta x}{x}$	$z = \ln x$	$\Delta z = \frac{\Delta x}{x}$

Επιλογή του κατάλληλου γραφήματος

Πολλές φορές θα σας χρειαστεί να χρησιμοποιήσετε γραφήματα για να ελέγξετε ή να διαπιστώσετε τη μορφή της σχέσης μεταξύ διαφόρων μεγεθών. Επίσης θα πρέπει να πάρετε μετρήσεις χρησιμοποιώντας γραφήματα. Για να μπορέσετε να καταφέρετε τα παραπάνω θα πρέπει να είσαστε σε θέση να διαχειριστείτε τα δεδομένα ώστε να πάρετε τελικά μια γραμμική σχέση. Η κλίση της ευθείας στο γράφημα και η τεταγμένη της τομής του άξονα y με την ευθεία σας δίνουν τη δυνατότητα να βρείτε διάφορα μεγέθη ανάλογα με τη σχέση που επεξεργάζεσθε. Για παράδειγμα όταν θέλετε να βρείτε την επιτάχυνση λόγω της βαρύτητας θα μπορούσατε να κάνετε το γράφημα της ταχύτητας ενός αντικειμένου, το οποίο εκτελεί ελεύθερη πτώση, σε σχέση με το χρόνο και να βρείτε την κλίση της ευθείας.
Σε μια γενική περίπτωση όπου θα έχετε μια πιο περίπλοκη μορφή συνάρτησης $y=f(x)$ και στο πείραμά σας έχετε πάρει ζεύγη τιμών (x,y) το ζήτημα που προκύπτει είναι το πως θα μπορέσετε να βρείτε τις παραμέτρους που υπεισέρχονται στη συνάρτηση *f*. Για να τις βρείτε θα πρέπει να διαχειριστείτε την $y=f(x)$ ώστε να πάρετε μια γραμμική σχέση. Παρακάτω θα δούμε μερικά από τα πιο συνηθισμένα παραδείγματα.

Λογαριθμική αύξηση ή μείωση

Η συνάρτηση που έχουμε εδώ είναι της μορφής $y=A+\Lambda\ln x$ και θα πρέπει πάλι να καθοριστούν τα *Α* και *Λ*. Αυτή ή συνάρτηση είναι ήδη γραμμική και έτσι μπορείτε να παραστήσετε γραφικά το y σε σχέση με το lnx. *Η τεταγμένη της* *τομής (τομή της ευθείας με τον άξονα y) θα σας δώσει την τιμή του Α, και η κλίση θα σας δώσει την τιμή του Λ.*

Εκθετική αύξηση ή μείωση

Η συνάρτηση που έχουμε εδώ είναι της μορφής $y=Ae^{\Lambda x}$, και θα πρέπει να καθοριστούν τα *Α* και *Λ*.

Η $y=Ae^{\Lambda x}$ *λογαριθμίζοντας γράφεται:* $\ln y=\ln A+\Lambda x$

Έτσι μπορείτε να παραστήσετε γραφικά το $\ln y$ σε σχέση με το *x.* Η γραφική παράσταση θα είναι ευθεία. Η τεταγμένη της τομής (τομή της ευθείας με τον άξονα *lny)* θα σας δώσει την τιμή του *Α*, και η κλίση θα σας δώσει την τιμή του *Λ*.

Δυναμικοί νόμοι

Εδώ έχουμε συναρτήσεις με άγνωστες δυνάμεις της μορφής $y=Ax^{\Lambda}$ και θα πρέπει πάλι να καθοριστούν τα *Α* και *Λ.*

Η $y=Ax^{\Lambda}$ λογαριθμίζοντας γράφεται $\ln y=\ln A+\Lambda \ln x$

Έτσι μπορείτε να παραστήσετε γραφικά το $\ln y$ σε σχέση με το $\ln x$. Η γραφική παράσταση θα είναι ευθεία. Η τεταγμένη της τομής (τομή της ευθείας με τον άξονα $\ln y$) θα σας δώσει την τιμή του $\ln A$ από την οποία θα βρείτε το *Α*, και η κλίση θα σας δώσει την τιμή του *Λ*.

Πιο περίπλοκες συναρτήσεις

Επειδή έχετε να κάνετε με πειραματικά δεδομένα, φαινομενικά δύσκολες μορφές μπορεί να αναχθούν σε γραμμικές αν τις αντιμετωπίσετε κατάλληλα.

Για παράδειγμα η $y=\lambda x^4+k\sqrt{x}$ γράφεται: $\frac{y}{\sqrt{x}}=k+\lambda x^{\frac{7}{2}}$

Έτσι μπορείτε να παραστήσετε γραφικά το $\frac{y}{\sqrt{x}}$ σε σχέση με το $x^{\frac{7}{2}}$. Η γραφική παράσταση θα είναι ευθεία. Η τεταγμένη της τομής (τομή της ευθείας με τον άξονα $\frac{y}{\sqrt{x}}$ *)* θα σας δώσει την τιμή του *k*, και η κλίση θα σας δώσει την τιμή του *λ.*

Η μέθοδος της διαστατικής ανάλυσης

Η διαστατική ανάλυση είναι μια σημαντική τεχνική στη φυσική η οποία μας επιτρέπει να ελέγξουμε την ορθότητα μιας εξίσωσης. Αν οι διαστάσεις στα δύο μέλη της εξίσωσης είναι ίδιες, η εξίσωση έχει διαστατική ορθότητα. Αν δεν είναι ίδιες, η εξίσωση δεν μπορεί να είναι σωστή. Υπάρχουν έξι θεμελιώδεις διαστάσεις. Τρεις από αυτές είναι:

Το μήκος L, η μάζα M, και ο χρόνος T,

Καθαροί αριθμοί, όπως ο π, δεν έχουν διαστάσεις.

Για παράδειγμα η ταχύτητα του φωτός *c* και γενικά η ταχύτητα *v*, έχει διαστάσεις LT^{-1}.

Στον παρακάτω πίνακα φαίνονται μερικά φυσικά μεγέθη και οι διαστάσεις τους.

Φυσικό μέγεθος	Διαστάσεις
Ενέργεια, *E*	$ML^{2}T^{-2}$
Ιξώδες, *n*	$ML^{-1}T^{-1}$
Ορμή, *p*	MLT^{-1}
Πυκνότητα, *d*	ML^{-3}
Μήκος κύματος *λ*	L
Σταθερά του Plank, *h*	$ML^{2}T^{-1}$

Με τη διαστατική ανάλυση μπορούμε να προβλέψουμε εξαρτήσεις διαφόρων μεγεθών. Για παράδειγμα εκτός από τη θεωρητική και την πειραματική μέθοδο, μπορούμε να κάνουμε μια πρόβλεψη για το από τι και πως επηρεάζεται η περίοδος ενός απλού εκκρεμούς.

Λογικό είναι να υποθέσουμε ότι η περίοδος *T* του εκκρεμούς εξαρτάται από: τη μάζα M το μήκος L και την επιτάχυνση λόγω της βαρύτητας g. Δηλαδή:

$T=kM^{a}L^{b}g^{c}$

Οι άγνωστοι εκθέτες είναι οι a,b,c και το k είναι μια αδιάστατη σταθερά.
Ας δούμε τις διαστάσεις. Έχουμε τρεις βασικές διαστάσεις: Τη μάζα (m) το μήκος (l) και το χρόνο (t). Εκφράζοντας κάθε μεταβλητή στην εξίσωση σε όρους αυτών των βασικών διαστάσεων, παίρνουμε:

$[t]=1[m]^{a}\,[l]^{b}\,[\frac{l}{t^{2}}]^{c}$ Για να υπάρχει διαστατική ορθότητα θα πρέπει:

Από το m : 0=a
Από το l : 0=b+c

Από το t :   1=-2c

Άρα a=0, $c=-\frac{1}{2}$, $b=\frac{1}{2}$

Έτσι: T=k $M^0 L^{\frac{1}{2}} g^{-\frac{1}{2}}$ οπότε $T = k\sqrt{\frac{L}{g}}$.

Η σταθερά k δεν μπορεί να βρεθεί με τη μέθοδο αυτή μπορεί όμως με τις άλλες δύο μεθόδους τη θεωρητική και την πειραματική.

Χάραξη ευθείας με τη χρήση της μεθόδου των ελαχίστων τετραγώνων

Έστω $y = mx + b$ η ευθεία που προκύπτει με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων. Τότε:

$m = \frac{\sum x \sum y - n\sum xy}{\left(\sum x\right)^2 - n\sum x^2}$	$b = \frac{\sum x \sum xy - \sum y \sum x^2}{\left(\sum x\right)^2 - n\sum x^2}$
$\Delta m = \sqrt{\frac{n\sigma^2}{n\sum x^2 - \left(\sum x\right)^2}}$	$\Delta b = \sqrt{\frac{\sigma^2 \sum x^2}{n\sum x^2 - \left(\sum x\right)^2}}$

Με :

$$\sigma = \sqrt{\sigma_y^2 + m^2\sigma_x^2}$$

και

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum \Delta x^2}{n}} \quad \sigma_y = \sqrt{\frac{\sum \Delta y^2}{n}}$$

όπου Δx και Δy είναι οι ανεξάρτητες αβεβαιότητες των n ανεξαρτήτων μετρήσεων.

Επιμέλεια
Σαράντος Οικονομίδης
sarecon@gmail.com