05-11-2015

ΠΕΡΙ ΜΟΝΑΔΩΝ ΜΕΤΡΗΣΗΣ ΚΑΙ ΑΛΛΑ ΣΧΕΤΙΚΑ

Εμμανουήλ Αντ. Δρης
Ομότιμος Καθηγητής
Ε.Μ.Πολυτεχνείου
2015

Πρόλογος

Η παρούσα εργασία έχει ως κύριο στόχο να βοηθήσει στο να πληρωθεί ένα κενό που υπάρχει στην ελληνική βιβλιογραφία που αφορά στις μονάδες, στο συμβολισμό μονάδων και φυσικών μεγεθών και στη Διαστατική Ανάλυση. Τουλάχιστο, δεν έχομε υπόψη να υπάρχει σχετική βιβλιογραφία που να είναι ευρέως διαδεδομένη σε Φυσικούς, Μαθηματικούς και στους περισσότερους Μηχανικούς.
Ξενόγλωσσα βιβλία Φυσικής, ακόμη και της μέσης εκπαίδευσης, έχουν μια απλή εισαγωγή στο θέμα των συστημάτων μονάδων. Το περιεχόμενο αυτού του πονήματος είναι καλό να είναι γνωστό και στους διδάσκοντες, ώστε να «περάσει» και στους μαθητές και φοιτητές. Ακόμη είναι χρήσιμο στους εκδοτικούς οίκους όσον αφορά στο τυπικό μέρος γραφής συμβόλων κτλ. Απευθύνεται κυρίως σε Φυσικούς αλλά και σε ανθρώπους που ασχολούνται με τις εφαρμογές της Φυσικής όπως Μηχανικούς και Μαθηματικούς αλλά και Χημικούς. Στη βιβλιογραφία που δίνομε μπορεί να βρει κάποιος, άμεσα ή έμμεσα, όλα τα σχετικά που αφορούν σε όλους τους επιστημονικούς κλάδους. Μπορεί να αποτελέσει το έναυσμα για τη συγγραφή κάποιων ποιο εμπεριστατωμένων αντίστοιχων εργασιών από πιο ειδικούς επιστήμονες, ιδιαίτερα από ειδικούς οι οποίοι εργάζονται στον ΕΛΟΤ (Ελληνικός Οργανισμός Τυποποίησης).
Για το θέμα της διαστατικής ανάλυσης κατά κανόνα οι πιο ειδικοί είναι επιστήμονες που ασχολούνται κυρίως με ρευστά. Στόχος αυτού του κεφαλαίου είναι να βεβαιώσει χρήστες διαστατικής ανάλυσης (κυρίως ανθρώπους που ασχολούνται με τη Φυσική), οι οποίοι δεν έχουν ειδικές γνώσεις στο αντικείμενο, ότι υπάρχει αυστηρή μαθηματική θεμελίωση αυτού του επιστημονικού κλάδου. Επίσης ο αναγνώστης μπορεί να προβληματιστεί και να αναζητήσει περαιτέρω γνώση σχετική με αυτό το αντικείμενο.

Εμμανουήλ Αντ. Δρης
Αθήνα 2015

Περιεχόμενα

Γενικά

Η μετρολογία είναι η επιστήμη της μέτρησης. Η ύπαρξή της χάνεται στα βάθη των αιώνων. Υπάρχει από την εποχή που οι άνθρωποι άρχισαν να κάνουν διάφορες ανταλλαγές. Αναπτύσσεται όλο και περισσότερο καθώς κατασκευάζονται πιο αναπτυγμένα εργαλεία και προϊόντα. Στα παλιά χρόνια υπάρχει σχεδόν «χάος», δηλαδή υπάρχει μεγάλο πλήθος «μέτρων» των διαφόρων προϊόντων που παράγονταν και ανταλλάσσονταν.
Η σύγχρονη μετρολογία άρχισε περίπου στα μέσα του 19^{ου} αιώνα ως συνέπεια της ανάπτυξης της βιομηχανίας και του διεθνούς εμπορίου για τα προϊόντα της βιομηχανίας. Μπορούμε να πούμε ότι η πρώτη σημαντική προσπάθεια ξεκινά με τη γαλλική επανάσταση όταν προτάθηκε το μετρικό σύστημα που είναι ο πρόγονος του Διεθνούς Συστήματος Μονάδων ΔΣ, (SI, Système International d' Unités, International System of Units). Στα μέσα του 19^{ου} αιώνα υπήρξε πιο έντονη η ανάγκη να καθιερωθούν διεθνείς συμφωνίες όσον αφορά στις μονάδες μέτρησης και έτσι ιδρύθηκε η Συνθήκη του Μέτρου (Meter Convention) το 1875. Αυτή δίνει το πλαίσιο για διακυβερνητικές συμφωνίες σε θέματα που σχετίζονται με τη μετρολογία και τις μονάδες μέτρησης. Στη συνέχεια έφτιαξε τρεις διεθνείς οργανισμούς, το Γραφείο Διεθνών Μέτρων και Σταθμών (Bureau International des Poids et Mesures, BIPM), τη Γενική Συνδυάσκεψη για Μέτρα και Σταθμά (General Conference on Weights and Measures, CGPM) και τη Διεθνή Επιτροπή για Μέτρα και σταθμά (International Committee for Weights and Measures, CIPM). Αμέσως μετά οι κυριότερες βιομηχανικές και εμπορικές χώρες έφτιαξαν τα δικά τους εθνικά εργαστήρια για πρότυπα . Στη συνέχεια πολλές χώρες έχουν Εθνικά Ινστιτούτα Μετρολογίας (National Metrology Institutes, NMI). Αυτά τα ινστιτούτα μαζί με το BIPM ασχολούνται με το παγκόσμιο σύστημα μετρήσεων, του οποίου θεμέλιο είναι το SI. Το SI είναι ένα ζωντανό εξελισσόμενο σύστημα που αλλάζει καθώς προκύπτει νέα γνώση και νέες ανάγκες μέτρησης. Τέλος, αναφέρομε τον Διεθνή Οργανισμό Τυποποίησης (International Organization for Standardization, ISO), ο οποίος είναι μια παγκόσμια συνεργασία αποτελούμενη από οργανισμούς εθνικών προτύπων (οργανισμοί μέλη του ISO). Τις επιμέρους εργασίες προτυποποίησης τις αναλαμβάνουν τεχνικές επιτροπές του ISO.
Η τεχνική επιτροπή ISO/TC 12 έχει σκοπό την τυποποίηση των μονάδων, των συμβόλων για τις διάφορες ποσότητες και μονάδες και τα μαθηματικά σύμβολα που χρησιμοποιούνται στις διάφορες περιοχές της επιστήμης και της τεχνολογίας. Δίνει, όπου χρειάζεται, ορισμούς αυτών των ποσοτήτων και των μονάδων. Μια άλλη ευθύνη αυτής της επιτροπής είναι να δίνει τυποποιημένους συντελεστές μετατροπής μεταξύ των διαφόρων μονάδων. Ο ISO συνεργάζεται στενά με την Διεθνή Επιτροπή Ηλεκροτεχνίας (International Electrotechnical Commission, IEC). Στην Ελλάδα υπεύθυνη υπηρεσία για θέματα τυποποίησης είναι ο ΕΛΟΤ (Ελληνικός Οργανισμός Τυποποίησης).
CODATA (Committee on Data for Science and Tecnology) είναι η επιτροπή που διαχειρίζεται τα αποτελέσματα διαφόρων μετρήσεων και δημοσιεύει τις τιμές των μετρήσεων με τα σφάλματά τους.
Πρέπει να αναφέρομε ότι τα κείμενα των διαφόρων διεθνών οργανισμών γράφονται στα γαλλικά και στα αγγλικά. Σε περίπτωση αμφιβολιών κυριαρχεί το γαλλικό κείμενο.

Λεπτομέρειες σχετικές με τα παραπάνω μπορεί να βρει κάποιος στην σχετικά περιορισμένη βιβλιογραφία που παραθέτομε, η οποία όμως με τη σειρά της παραπέμπει σε πιο πλήρη βιβλιογραφία.

1. Συστήματα μονάδων μέτρησης και αντίστοιχα συστήματα μεγεθών

Κατά καιρούς έχουν υπάρξει διάφορα συστήματα (φυσικών) μεγεθών και μονάδων μέτρησης, τελικώς έχει κυριαρχήσει παγκοσμίως το Διεθνές Σύστημα Μονάδων (ΔΣ), SI (Système International) που θα μας απασχολήσει στα επόμενα.

Μερικοί ορισμοί

Οι ορισμοί, που είναι ένα είδος λεξιλογίου, αποτελούν μια ενιαία αναφορά χρήσιμη σε επιστήμονες και μηχανικούς, στους οποίους συμπεριλαμβάνονται φυσικοί, χημικοί, επιστήμονες της ιατρικής καθώς και για διδάσκοντες και ανθρώπους που κάνουν μετρήσεις, κυρίως ακριβείας. Οι ορισμοί αυτοί είναι χρήσιμοι και για διακυβερνητικές επιτροπές, εμπορικές οργανώσεις, επιτροπές πιστοποίησης, κανονιστικά όργανα και επαγγελματικές εταιρίες.

Ποσότητα, μέγεθος (grandeur, quantity),
είναι ιδιότητα ενός φαινομένου, ενός σώματος ή μιας ουσίας, αυτή η ιδιότητα μπορεί να εκφραστεί ποσοτικά με τη μορφή ενός αριθμού και μιας αναφοράς. Η αναφορά μπορεί να είναι μια μονάδα μέτρησης, μια διαδικασία μέτρησης, ένα υλικό αναφοράς ή κάποιος συνδυασμός τους. Σύμβολα για τις ποσότητες δίνονται στις σειρές ISO 80000 και IEC 80000 υπό τον τίτλο Quantities and Units. Η ποσότητα, όπως την ορίσαμε, είναι βαθμωτή (μονόμετρη) ποσότητα. Εν τούτοις, ένα διάνυσμα ή ένας τανυστής οι συνιστώσες των οποίων είναι ποσότητες (μεγέθη) με την παραπάνω έννοια, θεωρούνται επίσης ότι είναι ποσότητες. Η έννοια μέγεθος ή ποσότητα μπορεί να χωριστεί σε διάφορες κατηγορίες όπως φυσικό μέγεθος ή ποσότητα, χημική ποσότητα και βιολογική ποσότητα ή σε θεμελιώδες μέγεθος και παράγωγο μέγεθος. Θα χρησιμοποιούμε πολλές φορές τον όρο φυσικό μέγεθος χωρίς τις επιμέρους διακρίσεις.

Είδη μεγεθών (nature de grandeur, kind of quantity),
ιδιότητα κοινή για παρόμοιες ποσότητες. Για παράδειγμα οι ποσότητες διάμετρος, περιφέρεια και μήκος κύματος γενικώς θεωρούνται ποσότητες ίδιου είδους, συγκεκριμένα του είδους που αναφέρεται ως μήκος. Οι ποσότητες του ίδιου είδους έχουν ίδιες διαστάσεις (που θα δούμε παρακάτω), όμως δεν ισχύει το αντίστροφο. Τα μεγέθη ροπή δύναμης και ενέργεια δεν συνηθίζομε να τα θεωρούμε ότι είναι του ίδιου είδους παρόλο που έχουν ίδιες διαστάσεις.

Σύστημα μεγεθών (système de grandeurs, system of quantities),
είναι ένα σύνολο μεγεθών μαζί με ένα σύνολο εξισώσεων οι οποίες δεν είναι αντιφατικές μεταξύ τους, οι οποίες συνδέουν αυτά τα μεγέθη.

Σημειώνομε ότι υπάρχει η κατηγορία των μεγεθών (ποσοτήτων) κατάταξης (grandeurs ordinales, ordinal quantities), οι οποίες συνήθως δεν θεωρούνται ότι είναι μέρος ενός συστήματος μεγεθών διότι σχετίζονται με άλλα μεγέθη μόνο με εμπειρικές σχέσεις. Αυτές ορίζονται με μια συμβατική διαδικασία μέτρησης. Υπάρχουν κλίμακες που οδηγούν σε αριθμητικές τιμές οι οποίες βρίσκονται με εμπειρικές σχέσεις οι οποίες περιέχουν συνήθη μεγέθη. Δεν υπάρχουν σε αυτές τις περιπτώσεις μονάδες μέτρησης ούτε διαστάσεις. Υπάρχει μόνο κατάταξη τέτοιων μεγεθών ίδιου είδους, σύμφωνα με την αριθμητική τιμή του μεγέθους. Δεν έχουν φυσικό νόημα διαφορές και λόγοι τέτοιων μεγεθών. Ένα τέτοιο παράδειγμα είναι το μέγεθος που λέγεται σκληρότητα (τύπου) C (του) Rockwell (υπό φορτίο 150 kg), HRC(150 kg) (durete C de Rockwell (charge de 150 kg), HRC(150 kg), Rockwell C hardness (150 kg load), HRC(150kg). Αυτό το μέγεθος μπορεί να σχετίζεται με τη σκληρότητα ενός δείγματος ατσαλιού. Στην πραγματικότητα το φορτίο (φόρτος) καταπόνησης είναι δύναμη $150\,\mathrm{kgf}$. Κατά τα γνωστά, κατά προσέγγιση στην επιφάνεια της γης αυτό το φορτίο είναι ίσο με το βάρος μάζας $150\,\mathrm{kg}$. Για λεπτομέρειες που αφορούν στη διαδικασία μέτρησης αυτού του είδους της σκληρότητας, πρέπει να ανατρέξει κάποιος στη βιβλιογραφία τη σχετική με αντοχή των υλικών.
Στην κατηγορία μεγεθών κατάταξης ανήκει ο αριθμός οκτανίων των καυσίμων, η ένταση σεισμού στην κλίμακα Richter κτλ.

Τιμή μεγέθους,
είναι ο συνδυασμός ενός αριθμού και μιας αναφοράς που μαζί αποτελούν την ποσοτική έκφραση ενός μεγέθους. Παραδείγματα είναι,
1) το μήκος μιας ράβδου: $5{,}34\,\mathrm{m}$ ή 534 cm,
2) η θερμοκρασία Κελσίου κάποιου σώματος: $-5\,^{\mathrm{o}}\mathrm{C}$,
3) η ηλεκτρική εμπέδηση (ολική αντίσταση) ενός στοιχείου κυκλώματος: $(7-3\mathrm{j})\,\Omega$,
4) η σκληρότητα τύπου C του Rockwell ορισμένου δείγματος (υπό φορτίο $150\,\mathrm{kg}$):
43,5HRC(150 kg),
5) ο δείκτης διάθλασης ορισμένου δείγματος γυαλιού: 1,32 ,
6) κλάσμα μάζας καδμίου μέσα σε ορισμένο δείγμα χαλκού: $3\,\mu\mathrm{g/kg}$ ή 3×10^{-9} .

Παρατηρούμε ότι ο αριθμός μπορεί να είναι και αρνητικός και μιγαδικός.
Πολλές φορές χρησιμοποιείται ο όρος μέτρο (στα αγγλικά magnitude), αλλά σε αυτή την περίπτωση μέτρο δεν σημαίνει θετικός αριθμός. Ίσως καλύτερα αντί για μέτρο να λέμε αριθμητική τιμή. Επίσης καλό είναι να μιλούμε για απόλυτη τιμή όταν αναφερόμαστε σε θετική ποσότητα ώστε να μην υπάρχει σύγχυση. Στην περίπτωση διανυσμάτων το μέτρο διανύσματος είναι θετική ποσότητα.

Αριθμητική τιμή (μεγέθους),
είναι ο αριθμός που υπάρχει στην τιμή του μεγέθους, εκτός από αριθμούς που σχετίζονται με την αναφορά. Παραδείγματα είναι για τις προηγούμενες περιπτώσεις,
1) 5,34 ή 534 αντιστοίχως
2) -5
3) 7-3j

4) 43,5
5) 1,32
6) Σε αυτή την περίπτωση αν γράψομε $3\,\mu\mathrm{g/kg}$ τότε η αριθμητική τιμή είναι 3 , παρόλο που η μονάδα $\mu\mathrm{g/kg}$ ισούται αριθμητικά με 10^{-9}, διότι αυτός ο αριθμός είναι μέρος της αναφοράς που εδώ είναι η μονάδα μέτρησης.
Αν γράψομε 3×10^{-9} τότε η αριθμητική τιμή είναι 3×10^{-9}. Ανάλογο ισχύει για την περίπτωση 1.

2. Αυτοσυνεπή συστήματα μεγεθών και μονάδων

Στη συνέχεια, θα ασχοληθούμε με φυσικά μεγέθη ή φυσικές ποσότητες που ανήκουν σε (συνήθη) σύστημα μεγεθών, δηλαδή δεν είναι μεγέθη κατάταξης, οπότε η αναφορά είναι η μονάδα μέτρησης, και επομένως χαρακτηρίζονται από αριθμητική τιμή και μονάδα μέτρησης. Η αριθμητική τιμή και η μονάδα μέτρησης αποτελούν την τιμή του μεγέθους. Για παράδειγμα, η τιμή της επιτάχυνσης είναι $a=-45,2\ \mathrm{m/s^2}$, όπου η αριθμητική τιμή της επιτάχυνσης είναι $-45,2$. Το σύμβολο a μπορεί να παριστάνει το φυσικό μέγεθος ή την τιμή του. Τονίζομε ξανά ότι η αριθμητική τιμή είναι καθαρός αριθμός ενώ η τιμή του μεγέθους έχει και μονάδα μέτρησης. Αναφέρομε από την αρχή ότι τα σύμβολα των φυσικών μεγεθών (και των τιμών τους) είναι πλάγια ενώ τα σύμβολα των μονάδων είναι όρθια.
Το μέγεθος (ή τιμή του) A ισούται με το γινόμενο της αριθμητικής τιμής του επί την αντίστοιχη μονάδα μέτρησης

$$A=\{A\}[A].$$

A είναι η φυσική ποσότητα ή η τιμή της, $\{A\}$ είναι η αριθμητική τιμή της και $[A]$ η μονάδα μέτρησής της. Για την ανωτέρω περίπτωση της επιτάχυνσης έχομε

$$A=a,\quad \{a\}=-42,2\ ,\ [a]=\mathrm{m/s^2}.$$

Κατά τον πολλαπλασιασμό και διαίρεση μεγεθών ισχύουν οι γνωστοί κανόνες της άλγεβρας, δηλαδή

$$AB=\{A\}[A]\{B\}[B]=\{A\}\{B\}[A][B]=\{AB\}[AB]$$

και

$$\frac{A}{B}=\frac{\{A\}[A]}{\{B\}[B]}=\left\{\frac{A}{B}\right\}\left[\frac{A}{B}\right]$$

Για παράδειγμα, $\upsilon=-8{,}1\ \mathrm{m/s}$, $t=21\ \mathrm{s}$, $\upsilon t=(-8{,}1\times21)\times(\mathrm{m/s}\times\mathrm{s})=-1{,}7\times10^{2}\mathrm{m}$.
Η αριθμητική τιμή $\{A\}$ μεγέθους A δίνεται από τη σχέση $\{A\}=A/[A]$.

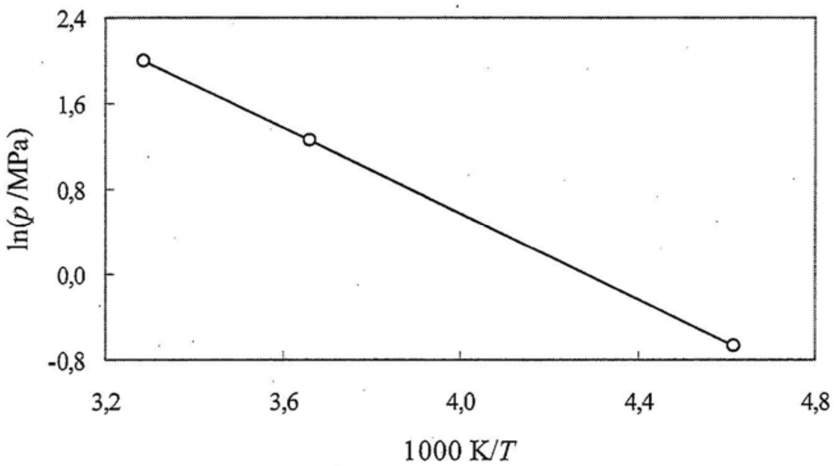
Στην παραπάνω περίπτωση με την επιτάχυνση έχομε
$\{a\} = (-42,2\,\mathrm{m/s^2})/(\mathrm{m/s^2}) = -42,2$.

Τα τελευταία σε συνδυασμό με το γεγονός ότι μεταξύ μονάδων και αριθμητικών τιμών επιτρέπονται οι συνήθεις αλγεβρικές πράξεις όπως πολλαπλασιασμός, διαίρεση κτλ, μας οδηγούν να χρησιμοποιούμε τον παρακάτω συμβολισμό σε πίνακες και σε γραφικές παραστάσεις. Αυτό είναι σε αρμονία με το γεγονός ότι στους άξονες και στους πίνακες εμφανίζονται αριθμητικές τιμές μεγεθών και όχι μεγέθη. Στον Πίνακα 1 που ακολουθεί δίνονται στοιχεία για την πίεση ατμού σε συνάρτηση με τη θερμοκρασία και ο φυσικός λογάριθμος της πίεσης ατμού σε συνάρτηση με το αντίστροφο της θερμοκρασίας.

Πίνακας 1

T/K	10^3 K/T	p/MPa	ln(p/MPa)
216,55	4,6179	0,5180	−0,6578
273,15	3,6610	3,4853	1,2486
304,19	3,2874	7,3815	1,9990

Το γράφημα στο Σχήμα 1 που ακολουθεί, είναι για το φυσικό λογάριθμο της πίεσης ατμού σε συνάρτηση με το αντίστροφο της θερμοκρασίας.



Σχήμα 1

3. Σχέσεις μεταξύ ποσοτήτων (μεγεθών) και σχέσεις μεταξύ αριθμητικών τιμών

Έχομε εξισώσεις μεταξύ μεγεθών όπως η σχέση

$$\upsilon = l / t \ .$$

Τέτοιες εξισώσεις είναι ανεξάρτητες από το ποιες είναι οι θεμελιώδεις μονάδες μέτρησης.
Επίσης έχομε εξισώσεις αριθμητικών τιμών όπως η παρακάτω που αντιστοιχεί στην προηγούμενη

$$\{\upsilon\}_{\mathrm{km/h}} = 3,6\{l\}_{\mathrm{m}} / \{t\}_{\mathrm{s}} \, .$$

Το 3,6 λέγεται εμπειρικός συντελεστής (πολλαπλασιαστής). Το l μετριέται σε μέτρα ο χρόνος σε δευτερόλεπτα και η ταχύτητα σε km/h . Τέτοιες σχέσεις μεταξύ φυσικών ποσοτήτων εξαρτώνται από τις μονάδες που χρησιμοποιούνται κάθε φορά για τις διάφορες ποσότητες οι οποίες μονάδες πρέπει να δηλώνονται ως δείκτες ή να γίνεται σαφής σχετική αναφορά στο κείμενο.
Έχομε αυτοσυνεπές ή σύμφωνο (coherent) σύστημα μονάδων αν η επιλογή των μονάδων είναι τέτοια που οι σχέσεις μεταξύ των αριθμητικών τιμών να είναι ακριβώς ίδια με τη σχέση μεταξύ των αντίστοιχων φυσικών μεγεθών, συμπεριλαμβανομένων των αριθμητικών συντελεστών αν υπάρχουν. Αυτή την ιδιότητα έχουν όλα τα συστήματα μονάδων που έχουν χρησιμοποιηθεί, δηλαδή είναι αυτοσυνεπή (σύμφωνα) συστήματα.
Δείτε ότι αυτό ισχύει για τις προηγούμενες σχέσεις αν μονάδες είναι για την ταχύτητα το m/s για το μήκος το m και για το χρόνο το s . Φυσικά το ίδιο ισχύει αν οι μονάδες είναι cm/s, cm, s αντιστοίχως.
Γενικώς θα μπορούσε κάποιος να χρησιμοποιεί οποιεσδήποτε ανεξάρτητες μονάδες για κάθε μια ποσότητα, αυτό όμως θα οδηγούσε στην εμφάνιση πρόσθετων αριθμητικών συντελεστών στις σχέσεις μεταξύ των ποσοτήτων, έτσι θα είχαμε μιαν ανεξέλεγκτη πολύπλοκη κατάσταση.

4. Διάσταση (ή διαστάσεις) μεγέθους, διάφορες μονάδες

Σε κάθε σύστημα φυσικών μεγεθών, υπάρχουν μαθηματικές σχέσεις που τα συνδέουν. Αυτές οι σχέσεις μπορεί να περιλαμβάνουν αδιάστατες σταθερές (αριθμούς) ή και σταθερές που έχουν διαστάσεις. Τα διάφορα συστήματα φυσικών μεγεθών μπορεί να έχουν σχέσεις που διαφέρουν ως προς τις σταθερές. Χαρακτηριστική περίπτωση είναι πολλές σχέσεις του Ηλεκτρομαγνητισμού στο gaussian σύστημα και στο SI, όπου για τη δύναμη Lorentz έχομε αντιστοίχως τις σχέσεις $\vec{E} + \dfrac{\vec{\upsilon}}{c} \times \vec{B}$ και $\vec{E} + \vec{\upsilon} \times \vec{B}$.
Λαμβάνεται αυθαίρετα ένα κατάλληλο πλήθος από αυτά τα μεγέθη του συστήματος τα οποία θεωρούνται ως ανεξάρτητα και λέγονται θεμελιώδη μεγέθη ενώ οι αντίστοιχες

μονάδες τους είναι οι θεμελιώδεις μονάδες. Κάθε άλλο μέγεθος αυτού του συστήματος και οι μονάδες του είναι παράγωγα μεγέθη και παράγωγες μονάδες αντιστοίχως. Τα παράγωγα μεγέθη σχετίζονται με τα θεμελιώδη με τις μαθηματικές σχέσεις που αναφέραμε προηγουμένως. Γενικώς δεν υπάρχει περιορισμός στο πόσα και πια μεγέθη μπορεί να θεωρηθούν ως θεμελιώδη, αρκεί να μην υπάρχουν ασυνέπειες. Θα δούμε σε άλλο κεφάλαιο περισσότερες λεπτομέρειες. Μια (ακραία) περίπτωση είναι η περιοχή των Στοιχειωδών Σωματιδίων όπου όλα τα μεγέθη μετριούνται με μια μόνο μονάδα υψωμένη σε κάποια δύναμη, τη μονάδα της ενέργειας που συνήθως είναι eV, MeV, GeV κτλ. Σε αυτή την περίπτωση οι διάφορες σχέσεις παίρνουν κατάλληλη μορφή και κάποιες σταθερές, π.χ. η ταχύτητα του φωτός στο κενό θεωρούνται αδιάστατες με τιμή ίση με τη μονάδα. Όπως θα δούμε και στα επόμενα, κάθε μέγεθος Q μπορεί να γραφτεί ως άθροισμα όρων που είναι γινόμενα άλλων μεγεθών. Ο κάθε όρος μπορεί να γραφτεί ως γινόμενο των θεμελιωδών μεγεθών $A, B, C, ...$ δηλαδή έχομε άθροισμα όρων στη μορφή

$$Q = \xi A^{\alpha} B^{\beta} C^{\gamma} ... + ...$$

τα ξ είναι αριθμητικοί συντελεστές (παράγοντες). Ένεκα της ομοιογένειας που αναφέρεται παρακάτω, τα $\alpha, \beta, \gamma, ...$ είναι τα ίδια για όλους τους προσθετέους. Η διάσταση ή διαστάσεις του Q είναι

$$\dim Q = \mathsf{A}^{\alpha} \mathsf{B}^{\beta} \mathsf{C}^{\gamma} ...$$

χωρίς τον αριθμητικό παράγοντα ξ. Τα $\mathsf{A}, \mathsf{B}, \mathsf{C}, ...$ είναι οι διαστάσεις των θεμελιωδών μεγεθών και τα α, β, γ,... είναι οι διαστατικοί εκθέτες του φυσικού μεγέθους Q. Σημειώνομε ότι τα σύμβολα που παριστάνουν τις διαστάσεις των θεμελιωδών μεγεθών είναι όρθια και sans serif (εδώ χρησιμοποιούμε τη γραμματοσειρά calibri light). Μια ποσότητα είναι αδιάστατη αν οι διαστατικοί εκθέτες της είναι όλοι μηδέν. Τότε η ποσότητα έχει διάσταση 1, διότι θα έχομε

$$\text{διάσταση} = \mathsf{A}^{0} \mathsf{B}^{0} ... = 1 \cdot 1 \cdot .... = 1.$$

Οι διαστάσεις εξαρτώνται από το σύστημα μονάδων που χρησιμοποιείται.
Όταν τα μεγέθη μήκος, L, μάζα, M, χρόνος, T, (ηλεκτρικό) ρεύμα, I, θερμοδυναμική θερμοκρασία (απόλυτη θερμοκρασία), Θ, γραμμομόριο, N, φωτεινή ένταση, J, λαμβάνονται ως θεμελιώδη τότε η διάστασή τους παριστάνεται με τα εξής αντίστοιχα σύμβολα $\mathsf{L}, \mathsf{M}, \mathsf{T}, \mathsf{I}, \Theta, \mathsf{N}, \mathsf{J}$. Αυτή η επιλογή ισχύει για το Διεθνές Σύστημα Μονάδων (SI).

Πίνακας 2
Παραδείγματα διαστάσεων μεγεθών

Μέγεθος	Διάσταση
Ταχύτητα	LT^{-1}
Γωνιακή ταχύτητα	T^{-1}
Δύναμη	LMT^{-2}
Γραμμομοριακή εντροπία	$\mathsf{L}^{2}\mathsf{MT}^{-2}\Theta^{-1}\mathsf{N}^{-1}$
Σχετική πυκνότητα	1

Η αυτοσυνέπεια επιτυγχάνεται στην πράξη με τον καθορισμό της μονάδας μέτρησης των παράγωγων μεγεθών από την εξίσωση για τις διαστάσεις του παράγωγου μεγέθους. Για το σκοπό αυτό ισχύουν οι παρακάτω αντιστοιχίες του Πίνακα 3 για τις διαστάσεις των θεμελιωδών μεγεθών και τις μονάδες τους

Πίνακας 3

Διάσταση $\rightarrow$ μονάδα

$\mathsf{L} \rightarrow \mathrm{m}$	$\mathsf{I} \rightarrow \mathrm{A}$
$\mathsf{M} \rightarrow \mathrm{kg}$	$\Theta \rightarrow \mathrm{K}$
$\mathsf{T} \rightarrow \mathrm{s}$	$\mathsf{N} \rightarrow \mathrm{mol}$
	$\mathsf{J} \rightarrow \mathrm{cd}$

Για παράδειγμα, από τη σχέση μεταξύ μεγεθών

$E = \dfrac{1}{2} m\upsilon^2$ καταλήγομε στην εξίσωση διαστάσεων $\dim E = \mathsf{ML^2T^{-2}}$, οπότε η μονάδα της κινητικής ενέργειας είναι $1\ \mathrm{kg \cdot m^2/s^2} = 1\ \mathrm{J} = 1$ joule (τζουλ).

Οι σωστές εκφράσεις μεταξύ φυσικών μεγεθών ενός αυτοσυνεπούς συστήματος είναι ομογενείς, δηλαδή το αριστερό και το δεξιό μέλος έχουν ίδιες διαστάσεις. Στη διαστατική ανάλυση ορίζεται ότι μια εξίσωση είναι διαστατικά ομογενής αν η μορφή της δεν εξαρτάται από τις θεμελιώδεις μονάδες. Η ομογένεια μας επιτρέπει να ελέγχομε τα αποτελέσματά μας, δηλαδή, αν μια σχέση που βρήκαμε δεν είναι ομογενής τότε σίγουρα είναι λάθος, δεν ισχύει όμως και το αντίστροφο.

Μπορούν να προστεθούν και αφαιρεθούν μόνο μεγέθη και εκφράσεις μεγεθών με ίδια διάσταση, δεν προστίθενται πορτοκάλια με χταπόδια.

Στον Πίνακα 4 δίνονται μερικές παράγωγες μονάδες. Δίνεται το μέγεθος στο οποίο αναφέρεται η μονάδα στα ελληνικά, το όνομα της μονάδας στα αγγλικά και στα ελληνικά, επίσης δίνεται το (διεθνές) σύμβολο της μονάδας και ισοδύναμες μορφές της μονάδας. Σημειώνομε ότι τα σύμβολα των μεγεθών είναι με πλάγια γράμματα ενώ τα σύμβολα των μονάδων είναι με όρθια γράμματα και δεν έχουν πληθυντικό. Τα ονόματα των μεγεθών και των μονάδων είναι γενικώς διαφορετικά στις διάφορες γλώσσες αλλά τα σύμβολά τους είναι υποχρεωτικά τα ίδια σε όλες τις γλώσσες. Υπάρχουν 22 παράγωγες μονάδες που έχουν ειδικά ονόματα, π.χ. η μονάδα πίεσης pascal (Pa), $1\,\mathrm{Pa} = 1\,\mathrm{N/m^2} = 1\,\mathrm{kg/(m\,s^2)}$.

Πίνακας 4

Παραδείγματα παράγωγων μονάδων του SI

Μέγεθος	Ειδικό όνομα μονάδας	Σύμβολο μονάδας	Ισοδύναμη έκφραση μονάδας
επίπεδη γωνία	ακτίνιο radian	rad	m/m=1
στερεά γωνία	στερακτίνιο steradian	sr	$m^2 / m^2 = 1$
ταχύτητα			m/s
επιτάχυνση			m/s^2
γωνιακή ταχύτητα			$rad/s^{-1} = s^{-1}$
γωνιακή επιτάχυνση			$rad/s^{-2} = s^{-2}$
συχνότητα	χερτζ hertz	Hz	s^{-1}
κυκλική συχνότητα			rad/s
δύναμη	νιούτον newton	N	$km \cdot m/s^2$
πίεση, μηχανική τάση	πασκάλ pascal	Pa	N/m^2
ενέργεια, έργο, θερμότητα	τζουλ joule	J	$N \cdot m$, $kg \cdot m^2/s^2$
ώθηση, ορμή			$N \cdot s$, $kg \cdot m/s$
ισχύς, ροή ακτινοβολίας	βατ watt	W	J/s
ηλεκτρικό φορτίο	κουλόμπ coulomb	C	$A \cdot s$
ηλεκτρικό δυναμικό, διαφορά δυναμικού, (ηλεκτρική) τάση, ηλεκτρεγερτική δύναμη (ΗΕΔ)	βολτ volt	V	J/C, W/A
χωρητικότητα	φαράντ farad	F	C/V
ηλεκτρική αντίσταση	ωμ ohm	Ω	V/A
ηλεκτρική αγωγιμότητα	ζίμενς siemens	S	A/V, Ω^{-1}
μαγνητική ροή	βέμπερ weber	Wb	$V \cdot s$
πυκνότητα μαγνητικής ροής	τέσλα tesla	T	Wb/m^2, $N/(A \cdot m)$
επαγωγή (συντελεστής)	χένρυ henry	H	Wb/A
θερμοκρασία Κελσίου	βαθμός Κελσίου degree Celsius	^oC	K
φωτεινή ροή	λούμεν lumen	lm	$cd \cdot sr$
φωτισμός	λουξ lux	lx	lm/m^2
ενεργότητα (ραδιονουκλιδίου)	μπεκερέλ becquerel	Bq	s^{-1}
ένταση ηλεκτρικού πεδίου			V/m, N/C

5. Ορισμός των θεμελιωδών μονάδων του SI

Όπως είπαμε στην αρχή, το σύστημα που έχει επικρατήσει διεθνώς είναι το Διεθνές Σύστημα Μονάδων (SI, Système International d' Unités, International System of Units). Αυτό έχει ως θεμελιώδη μεγέθη τα ακόλουθα επτά με τις αντίστοιχες μονάδες μέτρησής τους. Μήκος (m, μέτρο), μάζα (χιλιόγραμμο, kg), χρόνος (δευτερόλεπτο, s), ηλεκτρικό ρεύμα (A, αμπέρ), θερμοδυναμική θερμοκρασία (K, κέλβιν), ποσό ουσίας ή ποσό ύλης (mol, γραμμομόριο), φωτεινή ένταση (cd, καντήλα).
Οι ορισμοί των μονάδων του SI, με τα σύμβολά τους σε παρένθεση, είναι οι εξής

1. Το μέτρο (m) είναι το μήκος που διανύει το φως στο κενό σε χρονικό διάστημα 1/299 792 458 του δευτερολέπτου.
2. Το χιλιόγραμμο (kg) ισούται με τη μάζα του διεθνούς προτύπου του χιλιόγραμμου. Το διεθνές πρότυπο του χιλιόγραμμου είναι ένα κομμάτι από κράμα ιριδιούχου λευκόχρυσου που φυλάσσεται στις Σέβρες κοντά στο Παρίσι.
3. Το δευτερόλεπτο (s) είναι η διάρκεια 9 192 631 770 περιόδων της ακτινοβολίας που εκπέμπεται κατά τη μετάβαση των δυο υπέρλεπτων σταθμών της κατώτατης (θεμελιώδους) στάθμης του ατόμου του καισίου-133.
4. Το αμπέρ (A) είναι εκείνο το σταθερό (ηλεκτρικό) ρεύμα το οποίο, όταν διέρχεται από δυο ευθύγραμμους παράλληλους αγωγούς απείρου μήκους αμελητέας κυκλικής διατομής οι οποίοι βρίσκονται σε απόσταση μεταξύ τους 1 μέτρο στο κενό, ασκείται δύναμη μεταξύ τους ίση με 2×10^{-7} N/m, δηλαδή 2×10^{-7} νιούτον ανά μέτρο μήκους τους.
5. Το κέλβιν (K) είναι το κλάσμα 1/273,16 της θερμοδυναμικής θερμοκρασίας του τριπλού σημείου του νερού.
   Η σχέση μεταξύ της θερμοκρασίας Κελσίου t και κέλβιν T είναι
   $$t = T - T_0, \quad T_0 = 273{,}15 \text{ K}.$$
6. Το μολ ή γραμμομόριο (mol) είναι το ποσό ουσίας (ή ύλης) συστήματος το οποίο περιέχει τόσες στοιχειώδεις οντότητες όσα άτομα υπάρχουν σε 0,012 χιλιόγραμμα άνθρακα-12. Τα άτομα του άνθρακα-12 είναι ελεύθερα, σε ηρεμία και στην κατώτατη (θεμελιώδη) ενεργειακή κατάστασή τους.
   Όταν χρησιμοποιείται το μολ πρέπει να καθορίζονται οι στοιχειώδεις οντότητες που μπορεί να είναι άτομα, μόρια, ιόντα, ηλεκτρόνια ή άλλα σωματίδια ή καθορισμένες ομάδες τέτοιων σωματιδίων.
   Σχόλιο: Ο ορισμός αυτός καθορίζει την τιμή της σταθεράς (όχι τον αριθμό) Avogadro N_A ή L για την οποία ισχύει $N_A = (6{,}022\ 141...)\times10^{23}\ \text{mol}^{-1}$.

7. Η καντήλα (cd) είναι η φωτεινή ένταση (φωτοβολία) σε δεδομένη κατεύθυνση, πηγής που εκπέμπει μονοχρωματική ακτινοβολία συχνότητας 540×10^{12} Hz (χερτζ) και έχει ένταση ακτινοβολίας σε αυτή την κατεύθυνση ίση με 1/683 W/sr (βατ ανά στερακτίνιο).

Σχόλιο: Χρήσιμη είναι η έννοια του μεγέθους που λέγεται φωτεινή ροή. Η φωτεινή ροή σχετίζεται με την ένταση ακτινοβολίας (δηλαδή την ακτινοβολούμενη ισχύ) . Για τον καθορισμό της φωτεινής ροής λαμβάνεται υπόψη η αίσθηση του ανθρώπινου ματιού που διεγείρεται από ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία. Για το σκοπό αυτό έχει καθιερωθεί από την CIE (International Commission on Illumination, Διεθνής Επιτροπή για τον Φωτισμό), μια συνάρτηση βάρους η οποία αντιπροσωπεύει τη μέση απόκριση του ανθρώπινου ματιού στην ακτινοβολία. Το «μέσο» ανθρώπινο μάτι έχει τη μέγιστη ευαισθησία γύρω στη συχνότητα 540×10^{12} Hz, αυτή αντιστοιχεί σε μήκος κύματος 555,016 nm σε «συνήθη» αέρα. Η συνάρτηση βάρους έχει γραφική παράσταση μια καμπανοειδή καμπύλη περί αυτό το μήκος κύματος. Η σχέση που συνδέει την ολική φωτεινή ροή Φ_ν με την ακτινοβολούμενη ισχύ $\Phi_\mathrm{e} = \Phi_\mathrm{e}(\lambda)$ είναι, $\Phi_\nu = K_\mathrm{m} \int_\lambda \Phi_\mathrm{e}(\lambda) V(\lambda) \mathrm{d}\lambda$.

$V(\lambda)$ είναι η φασματική συνάρτηση φωτεινής απόδοσης (συνάρτηση βάρους) και

$K_\mathrm{m} = K(\lambda_{555}) = 683\ \mathrm{lm \cdot W^{-1}} \cdot [V(\lambda_\mathrm{m})/V(555{,}016\ \mathrm{nm})] \approx 683\ \mathrm{lm \cdot W^{-1}}$.

Το $\lambda_\mathrm{m} = 555$ nm, είναι το μήκος κύματος στο συνήθη αέρα όπου η συνάρτηση βάρους έχει τη μέγιστη τιμή της, $V(\lambda_\mathrm{m}) = V(555\ \mathrm{nm}) = 1{,}000\ 0000$.

Ενδιαφέρουσα είναι και η έννοια της φωτεινής αποτελεσματικότητας (luminus efficacy) που είναι το πηλίκο της φωτεινής ροής δια της ροής ακτινοβολίας, αυτό είναι μέγεθος με διαστάσεις, μετριέται σε lumen ανά watt, (lm/W), δεν είναι ένα είδος απόδοσης που είναι αδιάστατο μέγεθος.

Επειδή ο όρος «ένταση» στη Φυσική χρησιμοποιείται για να δηλώσει συγκεκριμένα φυσικά μεγέθη, τα οποία σχετίζονται με κάποιο υπόθεμα, όπως π.χ. η ένταση ηλεκτρικού πεδίου η οποία είναι δύναμη ανά υπόθεμα, που εδώ είναι φορτίο, ($E = F / q$), δεν συνιστάται η ορολογία «ένταση (ηλεκτρικού) ρεύματος I » αλλά να γίνεται χρήση του όρου (ηλεκτρικό) ρεύμα I .

Στον Πίνακα 5 φαίνονται οι θεμελιώδεις μονάδες του SI. Δίνεται το είδος του μεγέθους το οποίο εκφράζει η κάθε μονάδα, το αγγλικό και το ελληνικό όνομά της, το (διεθνές) σύμβολό της και το σύμβολο της διάστασής της.

Πίνακας 5
Οι θεμελιώδεις μονάδες του SI

Μέγεθος	Όνομα	Σύμβολο	Διάσταση
μήκος	meter μέτρο	m	L
μάζα	kilogram χιλιόγραμμο	kg	M
χρόνος	second δευτερόλεπτο	s	T
(ηλεκτρικό) ρεύμα	ampere αμπέρ	A	I
θερμοδυναμική θερμοκρασία	kelvin κέλβιν	K	Θ
ποσό ουσίας (ή ύλης)	mole μολ (γραμμομόριο)	mol	N
φωτεινή ένταση	candela καντήλα	cd	J

6. Πολλαπλάσια και υποπολλαπλάσια μονάδων

Οι μονάδες πολλές φορές είναι πολύ μικρές ή πολύ μεγάλες για χρήση σε διάφορες περιπτώσεις. Για το σκοπό αυτό χρησιμοποιούνται πολλαπλάσια και υποπολλαπλάσια των μονάδων του SI , όπου οι πολλαπλασιαστές (παράγοντες πολλαπλασιασμού) είναι δυνάμεις του 10, όπως δείχνει ο Πίνακας 6. Οι πολλαπλασιαστές λέγονται προθέματα. Στον Πίνακα 6 δίνεται το όνομα του προθέματος στα αγγλικά, μια απόδοση στα ελληνικά και το (διεθνές) σύμβολό του. Φυσικά υπάρχουν και πολλαπλασιαστές που δεν ακολουθούν αυτό τον κανόνα, αυτές χρησιμοποιούνται από παράδοση (ιστορικοί λόγοι), αλλά είναι εκτός SI, π.χ. το πρώτο λεπτό (1 min) ισούται με 60 δευτερόλεπτα, (1 min = 60 s). Σημειώστε ότι τα σύμβολα είναι με κεφαλαία γράμματα μέχρι και το πρόθεμα mega (M), τα υπόλοιπα δηλώνονται με πεζά γράμματα. Τα ονόματα των προθεμάτων είναι γενικώς διαφορετικά στις διάφορες γλώσσες όμως το σύμβολο είναι διεθνώς υποχρεωτικά το ίδιο (και με όρθια γράμματα).
Τα ονόματα των προθεμάτων προέρχονται από ελληνικές, λατινικές και άλλες γλώσσες. Προσέξτε ότι οι δυνάμεις του 10 που είναι τα προθέματα, διαφέρουν η μια από την άλλη κατά 3, με εξαίρεση κάποιες στη μέση του καταλόγου. Δηλαδή τα πλείστα προθέματα είναι της μορφής 10^{3k} όπου k ακέραιος. Πολλά ονόματά τους προέρχονται από την τιμή του k σε κάποια γλώσσα. Για παράδειγμα το peta (P) προέρχεται από το ελληνικό πέντε και σημαίνει πολλαπλασιαστή με $k = 5$, ο παράγοντας είναι $10^{3\times 5} = 10^{15}$.

Πίνακας 6

Προθέματα του SI

Παράγοντας πολλαπλασιασμού	Όνομα		Σύμβολο
10^{24}	yotta	γυοτα	Y
10^{21}	zetta	ζητα	Z
10^{18}	exa	εξα	E
10^{15}	peta	πετα	P
10^{12}	tera	τερα	T
10^{9}	giga	γιγα	G
10^{6}	mega	μεγα	M
10^{3}	kilo	χιλιο, κιλο	k
10^{2}	hecto	εκατο	h
10^{1}	deca ή deka	δεκα	da
10^{-1}	deci	δεκατο, ντεσι	d
10^{-2}	centi	εκατοστο, σεντι	c
10^{-3}	milli	χιλιοστο, μιλι	m
10^{-6}	micro	μικρο	μ
10^{-9}	nano	νανο	n
10^{-12}	pico	πικο	p
10^{-15}	fempto	φεμπτο	f
10^{-18}	atto	ατο	a
10^{-21}	zepto	ζεπτο	z
10^{-24}	yocto	γυοκτο	y

Για πληρότητα αναφέρομε ότι, η Διεθνής Ηλεκτροχημική Επιτροπή (International Electrochemical Commission, IEC) έχει εγκρίνει τον Πίνακα 7 για προθέματα που είναι πολλαπλασιαστές στο δυαδικό σύστημα. Δίνεται μόνο το αγγλικό όνομα. Αυτά τα προθέματα είναι για χρήση στις επιστημονικές περιοχές επεξεργασίας δεδομένων και μετάδοσης δεδομένων. Αυτά δεν ανήκουν στο SI αλλά όπως φαίνεται παρακάτω έχει γίνει δανεισμός χαρακτηριστικών από τα προθέματα του SI.
Στην περιοχή αυτής της τεχνολογίας χρησιμοποιούνται και τα προθέματα του SI τα οποία έχουν τη συνήθη τους σημασία.

Πίνακας 7

Προθέματα του δυαδικού

Παράγοντας πολλαπλασιασμού	Αγγλικό όνομα	Σύμβολο	Προέλευση	Παραγωγή
2^{10}	kibi	Ki	kilobinary: $\left(2^{10}\right)^{1}$	kilo: $\left(10^{3}\right)^{1}$
2^{20}	mebi	Mi	megabinary: $\left(2^{10}\right)^{2}$	mega: $\left(10^{3}\right)^{2}$
2^{30}	gibi	Gi	gigabinary: $\left(2^{10}\right)^{3}$	giga: $\left(10^{3}\right)^{3}$
2^{40}	tebi	Ti	terabinary: $\left(2^{10}\right)^{4}$	tera: $\left(10^{3}\right)^{4}$
2^{50}	pebi	Pi	petabinary: $\left(2^{10}\right)^{5}$	peta: $\left(10^{3}\right)^{5}$
2^{60}	exbi	Ei	exabinary: $\left(2^{10}\right)^{6}$	exa: $\left(10^{3}\right)^{6}$

Στα αγγλικά η πρώτη συλλαβή προφέρεται όπως και στην περίπτωση του SI και η δεύτερη ως bee. Ανάλογα μπορεί κάποιος να προτείνει και για τα ελληνικά όπου η δεύτερη συλλαβή μπορεί να προφέρεται μπι.

Σημειώνομε ότι κάποτε οι ειδικοί των υπολογιστών είδαν ότι το 2^{10} ήταν περίπου ίσο με το 1000 και έτσι χρησιμοποιούσαν το πρόθεμα kilo να σημαίνει 1024. Σήμερα υπάρχει ακόμη κάποια σύγχυση που μπορεί να λυθεί με την χρήση των δυαδικών προθεμάτων.

Στον Πίνακα 8 φαίνονται μερικές συγκρίσεις των προθεμάτων του δυαδικού με τα προθέματα του SI.

Πίνακας 8
Παραδείγματα και συγκρίσεις προθεμάτων δυαδικού και SI

1 kibibit	1 Kibit = 2^{10} bit = 1024 bit
1 kilobit	1 kbit = 2^{3} bit = 1000 bit
1 mebibyte	1 MiB = 2^{20} B = 1 048 576 B
1 megabyte	1 MB = 2^{6} B = 1 000 000 B
1 gibibyte	1 GiB = 2^{30} B = 1 073 741 824 B
1 gigabyte	1 GB = 2^{9} B = 1 000 000 000 B

7. Μονάδες εκτός SI

Στον Πίνακα 9 φαίνονται οι μονάδες που δεν ανήκουν στο SI αλλά έχει γίνει αποδεκτό να χρησιμοποιούνται με το SI. Δίνεται το ελληνικό και το αγγλικό τους όνομα.

Πίνακας 9
Μονάδες εκτός SI που είναι αποδεκτές για χρήση μαζί με τις μονάδες του SI

Μέγεθος	Όνομα μονάδας	Σύμβολο	Τιμή σε μονάδες του SI
χρόνος	minute λεπτό hour ώρα day ημέρα	min h d	1 min = 60 s 1 h =60 min = 3600 s 1 d = 24 h = 86 400 s
επίπεδη γωνία	degree βαθμός minute πρώτο λεπτό second δεύτερο λεπτό	o ′ ′′	$1^{\circ} = (\pi/180)$ rad $1' = (1/60)^{\circ} = (\pi/10\,800)$ rad $1'' = (1/60)' = (\pi/648\,000)$ rad
επιφάνεια	hectare εκτάριο	ha	$1\,\text{ha} = 1\,\text{hm}^2 = 10^4\ \text{m}^2$
όγκος	litre λίτρο	L, l	$1\,\text{L} = 1\,\text{l} = 1\,\text{dm}^3 = 10^3\ \text{cm}^3 = 10^{-3}\ \text{m}^3$
μάζα	tonne τόνος	t	10^3 kg
μήκος	astronomical unit αστρονομική μονάδα	au	1 au=149 597 870 700 m

Στον Πίνακα 10 φαίνονται οι μονάδες εκτός SI των οποίων οι τιμές πρέπει να προσδιορίζονται πειραματικά. Εξαίρεση αποτελεί η φυσική μονάδα ταχύτητας. Το όνομα δίνεται στα αγγλικά και στα ελληνικά.

Πίνακας 10

Μονάδες εκτός SI που πρέπει οι τιμές τους να προσδιορίζονται πειραματικά.

Μέγεθος	Όνομα	Σύμβολο	Τιμή στο SI
	Μονάδες αποδεκτές για χρήση με το SI		
ενέργεια	electronvolt ηλεκτρονιοβόλτ	eV	$1\,\mathrm{eV}=1{,}602\ 176\ 565(35)\times 10^{-19}$ J
μάζα	dalton ντάλτον unified atomic mass unit παγκόσμια μονάδα ατομικής μάζας	Da u	$1\,\mathrm{Da}=1{,}660\ 538\ 921(73)\times 10^{-27}\,\mathrm{kg}$ $1\,\mathrm{u}=1\,\mathrm{Da}$
	Φυσικές μονάδες (Natural units, n.u.)		
ταχύτητα	n.u. of speed φυσική μονάδα ταχύτητας (ταχύτητα του φωτός στο κενό)	c_0	299 792 458 m/s (ακριβώς)
δράση	n.u. of action (reduced Planck constant) φυσική μονάδα δράσης (ανηγμένη σταθερά του Planck)	$\hbar$	$1{,}054\ 571\ 726(47)\times 10^{-34}$ J s
μάζα	n.u. of mass (electron mass) φυσική μονάδα μάζας (μάζα του ηλεκτρονίου)	m_e	$9{,}109\ 382\ 91(40)\times 10^{-31}\,\mathrm{kg}$
χρόνος	n.u. of time φυσική μονάδα χρόνου	$\hbar/(m_\mathrm{e}c_0^2)$	$1{,}288\ 088\ 668\ 33(83)\times 10^{-21}\,\mathrm{s}$

Συνέχεια του Πίνακα 10

Ατομικές μονάδες (Atomic units, a.u.)

φορτίο	a.u. of charge (elementary charge) ατομική μονάδα φορτίου (στοιχειώδες φορτίο)	e	$1,602\ 176\ 565(35) \times 10^{-19}\mathrm{C}$
μάζα	a.u. of mass (electron mass) ατομική μονάδα μάζας (μάζα του ηλεκτρονίου)	m_e	$9,109\ 382\ 91(40) \times 10^{-31}\mathrm{kg}$
δράση	a.u. of action (reduced Planck constant) ατομική μονάδα δράσης (ανηγμένη σταθερά του Planck)	$\hbar$	$1,054\ 571\ 726(47) \times 10^{-34}\ \mathrm{J\,s}$
μήκος	a.u. of length (Bohr radius) ατομική μονάδα μήκους (ακτίνα του Bohr)	a_0	$0,529\ 177\ 210\ 92(17) \times 10^{-10}\mathrm{m}$
ενέργεια	a.u. of energy, hartree (Hartree energy) ατομική μονάδα ενέργειας, hartree (ενέργεια Hartree)	E_h	$4,359\ 744\ 34(19) \times 10^{-18}\ \mathrm{J}$
χρόνος	a.u. of time ατομική μονάδα χρόνου	$\hbar / E_h$	$2,418\ 884\ 326\ 502(12) \times 10^{-17}\ \mathrm{s}$

Οι τιμές των μονάδων έχουν ληφθεί από τις προτεινόμενες τιμές του 2010 CODATA, P.J. Mohr, B.N. Taylor, and D. B. Newell, Rev. Mod. Phys., 2012,84,1527-1605.

Τα δυο ψηφία στην παρένθεση δείχνουν την αβεβαιότητα στα δυο τελευταία ψηφία της αριθμητικής τιμής. Για παράδειγμα η αβεβαιότητα στο ηλεκτρονιοβόλτ για το οποίο ισχύει $1\,\mathrm{eV}=1{,}602\ 176\ 565(35) \times 10^{-19}\ \mathrm{J}$, είναι ίση με $0{,}000\ 000\ 035 \times 10^{-19}\ \mathrm{J}$. Υπάρχουν κάποιες μονάδες εκτός SI που από συνήθεια χρησιμοποιούνται σε κλάδους όπως είναι η Μετεωρολογία, η Ναυσιπλοΐα κτλ και γι αυτό παραθέτομε τον Πίνακα 11. Δίνομε την τιμή τους σε μονάδες του SI και το αγγλικό και το ελληνικό όνομα.

Πίνακας 11

Άλλες μονάδες εκτός SI σε ευρεία χρήση

μέγεθος	Όνομα		Σύμβολο	Τιμή στο SI
πίεση	bar	μπαρ	bar	1 bar = 0,1 MPa = 100 kPa = 10^5 Pa
	millimeter of mercury	χιλιοστό υδραργύρου	mmHg	1 mmHg = 133,322 Pa
μήκος	angstrom	άνγκστρομ	Å	1 Å = 0,1 nm = 100 pm = 10^{-10}m
απόσταση	nautical mile	ναυτικό μίλι	M	1 M = 1852 m
επιφάνεια	barn	μπαρν	b	1 b = 100 fm^2 = (10^{-12} cm)^2 = 10^{-28} m^2
ταχύτητα	knot	κόμβος	kn	1 kn = (1852 / 3600) m/s
μεγέθη	neper	νέπερ	Np	
λογάριθμοι	bel	μπελ	B	
λόγων	decibel	ντεσιμπέλ	dB	

Η μονάδα bar για την πίεση θεωρείται σήμερα ως η κανονική πίεση (standard pressure) για τη θερμοδυναμική. Για το ναυτικό μίλι δεν υπάρχει μοναδικό σύμβολο, συνηθίζονται τα εξής σύμβολα M, NM, Nm και nmi.

Στη συνέχεια κάνομε μερικές διευκρινήσεις σχετικές με τα μεγέθη που είναι λογάριθμοι λόγων.

Η διατύπωση $L_A = n$ Np, όπου n είναι αριθμός, σημαίνει ότι για δυο τιμές A_2, A_1 του μεγέθους A, ισχύει $n = \ln(A_2 / A_1)$. Αν $L_A = 1$ Np, τότε $A_2 / A_1 = \mathrm{e}$.

Η διατύπωση $L_X = m$ dB $= (m/10)$ B, όπου m είναι αριθμός, σημαίνει ότι για δυο τιμές X, X_0 του σχετικού μεγέθους, ισχύει $\lg(X / X_0) = m/10$. Αν $L_X = 1$ B, τότε $X / X_0 = 10$. Αν $L_X = 1$ dB, τότε $X / X_0 = 10^{1/10}$.

Υπάρχουν μονάδες που χρησιμοποιούνται από μερικούς σε συγγράμματα, οι οποίες ανήκουν στα συστήματα CGS και gaussian. Μπορεί να τις βρει κάποιος στη βιβλιογραφία που δίνομε στο τέλος.

Στον Πίνακα 12 δίνομε και άλλες μονάδες εκτός SI που μπορεί να συναντήσει κάποιος σε μερικά συγγράμματα. Δίνομε τα ελληνικά ονόματα.

Πίνακας 12

Και τους μονάδες εκτός SI

Μέγεθος	Όνομα και σύμβολο		Τιμή στο SI
δύναμη	χιλιόγραμμο δύναμης (κιλοπόντ)	kgf (kp)	$1\ \text{kgf} = 9,806\ 65\ \text{N}$ (ακριβώς)
πίεση	κανονική ατμόσφαιρα	atm	$1\ \text{atm} = 101\ 325\ \text{Pa}$ (ακριβώς)
	τορ	Torr	$1\ \text{Torr} = (1/760)\ \text{atm}$ (ακριβώς) $\approx 133,322\ \text{Pa}$
	τεχνητή ατμόσφαιρα	at	$1\ \text{atm} = 1\ \text{kgf/cm}^2$ $= 98\ 066,5\ \text{Pa}$ (ακριβώς) $= 0,967\ 841\ \text{atm}$
ισχύς	μετρικός ίππος	CV, PS	$1\ \text{CV} = 75\ \text{kgf m/s}$ (ακριβώς) $= 735,498\ 75\ \text{W}$ (ακριβώς)
	ίππος (ιπποδύναμη)	hp	$1\ \text{hp} = 745,6999\ \text{W}$ (ακριβώς)
πυκνότητα μαγνητικής ροής	γκάους	Gs (στη Φυσική G)	$1\ \text{G} = 10^{-4}\ \text{T}$

Στον Πίνακα 13 δίνομε μετατροπές μεταξύ διαφόρων μονάδων παρόλο που δεν συνιστάται η χρήση πολλών από αυτές.

Πίνακας 13

Μετατροπές διαφόρων μονάδων

1 in (ίντσα) $= 2{,}54$ cm (ακριβώς)

1 ft (πόδι) $= 12$ in (ακριβώς) $= 0{,}3048$ m (ακριβώς)

1 yd (γυάρδα, πήχυς) $= 3$ ft (ακριβώς) $= 0{,}9144$ m (ακριβώς)

1 mile (μίλι) $= 5280$ ft (ακριβώς) $= 1{,}609\ 344$ m (ακριβώς)

1 L (λίτρο) $= 10^{-3}\ \mathrm{m}^3$ (ακριβώς)

1 min (λεπτό) $= 60$ s

1 h (ώρα) $= 60$ min=3600 s

1 d (ημέρα) $= 24$ h $= 86\ 400$ s

1 a (annum, έτος) ή 1 $\mathrm{a}_{\mathrm{trop}}$(τροπικό έτος) $\approx 365{,}242\ 20$ d $\approx 31\ 556\ 926$ s

1 g_{n} (κανονική τιμή της επιτάχυνσης της βαρύτητας) $= 9{,}806\ 65\ \mathrm{m/s}^2$ (ακριβώς)

1 lb (πάουντ, λίμπρα) $= 0{,}453\ 592\ 37$ kg (ακριβώς)

1 acre $= 4840\ \mathrm{yd}^2$(ακριβώς) $= 4064{,}856\ \mathrm{m}^2$

1 barrel,USA (βαρέλι,ΗΠΑ) $= 9702\ \mathrm{in}^3 = 158{,}9873$ L

1 lbf (πάουντ δύναμης) $= 4{,}448\ 222$ N

1 Btu (βρετανική μονάδα θερμότητας) $= 788{,}169\ \mathrm{ft \cdot lbf} = 1055{,}056$ J

Το a για τη μονάδα έτος προέρχεται από το annum που θα πει έτος στα λατινικά. Στα αγγλικά για το έτος χρησιμοποιούνται και τα σύμβολα 1 y και 1 yr.

Αναφέρομε εδώ ότι υπάρχουν σε χρήση οι λεγόμενοι χαρακτηριστικοί αριθμοί οι οποίοι είναι αδιάστατοι συνδυασμοί φυσικών μεγεθών. Αναφέρομε δυο από αυτούς,

Α) ο αριθμός Reynolds ο οποίος έχει ως σύμβολο το Re, ορίζεται από τη σχέση $Re = \frac{\rho \upsilon l}{\eta} = \frac{\upsilon l}{\nu}$, $\nu = \frac{\eta}{\rho} =$ κινηματικό ιξώδες . Ο αριθμός αυτός χρησιμοποιείται στη μελέτη της ροής ρευστών. Το υ είναι μια χαρακτηριστική ταχύτητα, ρ είναι η πυκνότητα του ρευστού, l είναι ένα χαρακτηριστικό μήκος και η είναι ο συντελεστής δυναμικού ιξώδους (συντελεστής εσωτερικής τριβής).

Β) ο αριθμός Mach (Μαχ) ο οποίος έχει ως σύμβολο το Ma, ορίζεται από τη σχέση

$Ma = \frac{\upsilon}{c}$, υ είναι μια χαρακτηριστική ταχύτητα κάποιου αντικειμένου, π.χ. η ταχύτητα πυραύλου ή αεροπλάνου και c είναι η ταχύτητα του ήχου στο μέσον που γίνεται η κίνηση του αντικειμένου. Τονίζομε ότι Mach δεν είναι μονάδα, γι αυτό πρέπει να μπαίνει πριν τον αριθμό. Δηλαδή λέμε το υπερηχητικό αεροπλάνο κινείται με Mach = 3.

Αυτό σημαίνει ότι κινείται με ταχύτητα $\upsilon = 3\ c$, δηλαδή με ταχύτητα ίση με τρεις φορές την ταχύτητα του ήχου. Επίσης λέμε ότι κινείται με αριθμό Mach 3.

8. Μερικά προτεινόμενα σύμβολα για φυσικά μεγέθη

Στον Πίνακα 14 φαίνονται μερικά μεγέθη και τα προτεινόμενα σύμβολά τους.

Πίνακας 14

Προτεινόμενα σύμβολα μερικών φυσικών μεγεθών

Μέγεθος	Σύμβολο	Μέγεθος	Σύμβολο
στροφορμή	L, J	θερμοδυναμική θερμοκρασία	$T, \mathit{\Theta}$
ποσότητα ουσίας (ύλης)	$n, (\nu)$	θερμοκρασία Κελσίου	t, θ
ορμή	P	θερμοκρασία Φαρενάιτ	t_{F}
σταθερά Avogadro	L, N_{A}	ηλεκτρικό φορτίο	q, Q
ροπή αδράνειας	$I,\ J$	ηλεκτρικό ρεύμα	i, I
γραμμομοριακή μάζα	M	πυκνότητα ηλεκτρικού ρεύματος	j, J
βάρος	F_{g}, G, W, P	ηλεκτρικό δυναμικό	$V, \mathit{\Phi}$
ροπή (δύναμης)	M	διαφορά δυναμικού	V, U
ροπή (ζεύγους)	M, T	ηλεκτρική ροή	$\mathit{\Phi}_E, \mathit{\Psi}$
πίεση	p, P	μαγνητική ροή	$\mathit{\Phi}_B$
αριθμός σωματιδίων	N	σχετική επιτρεπτότητα	$\varepsilon_{\mathrm{r}}, K$
πυκνότητα αριθμού	n	(ή διηλεκτρική σταθερά)	
σωματιδίων		σχετική διαπερατότητα	μ_{r}
σχετική ατομική μάζα	A_{r}	μαγνητική σταθερά	μ_0

Συνέχεια του Πίνακα 14

σχετική μοριακή μάζα	M_r	(διαπερατότητα του κενού)	
έργο	W	ηλεκτρική σταθερά	ε_0
ισχύς	P, N	(ή επιτρεπτότητα του κενού)	
ένταση ηλεκτρικού πεδίου	E	ένταση μαγνητικού πεδίου	H
		(ή μαγνητική διέγερση)	

9. Μερικά προτεινόμενα μαθηματικά σύμβολα

Στον Πίνακα 15 φαίνονται προτεινόμενα μαθηματικά σύμβολα για χρήση στις επιστήμες μηχανικού και στη Φυσική.

Πίνακας 15

Προτεινόμενα μαθηματικά σύμβολα

Σύμβολο	Εφαρμογή	Σημασία
$\overset{\text{def}}{=}$, $\overset{\text{d}}{=}$, $:=$	$a \overset{\text{def}}{=} b$	το a είναι εξ ορισμού ίσο με το b, π.χ. $p \overset{\text{d}}{=} m\upsilon$
$\triangleq$	$a \triangleq b$	το a αντιστοιχεί στο b, π.χ. αν $E = kT$,
		1 eV $\triangleq$ 11 604,5 K
$\equiv$	$a \equiv b$	το πρώτο μέλος είναι ταυτοτικά ίσο με το δεύτερο,
		π.χ. $\left(a+b\right)^2 \equiv a^2 + 2ab + b^2$
$\approx$	$a \approx b$	το a είναι περίπου ίσο με το b
$\simeq$	$a \simeq b$	το a είναι ασυμπτωτικά ίσο με το b
$\sim, \propto$	$a \sim b$	το a είναι ανάλογο του b
sgn	sgn z	πρόσημο του z,
	(z γενικώς μιγαδικό)	$\operatorname{sgn} z = z/\lvert z\rvert \;\; z \neq 0$, $\operatorname{sgn} z = 0, z = 0$
$\overline{a}$, $\langle a \rangle$		μέση τιμή του a

Στον Πίνακα 16 για τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις φαίνεται το (διεθνές) σύμβολο, το όνομα στα ελληνικά και η σημασία και κάποια σχόλια.

Πίνακας 16

Κυκλικές (τριγωνομετρικές) και υπερβολικές συναρτήσεις

Σύμβολο	Όνομα, σημασία	Σχόλια και παραδείγματα
π	λόγος περιφέρειας κύκλου δια της διαμέτρου του	$\pi = 3{,}141\ 592\ 6...$
$\sin x$	ημίτονο του x	Γράφομε $(\sin x)^n$ ή $\sin^n x$.
$\cos x$	συνημίτονο του x	Γράφομε $(\cos x)^n$ ή $\cos^n x$.
$\tan x$	εφαπτομένη του x	Χρησιμοποιείται και το $\mathrm{tg}\, x$.
$\cot x$	συνεφαπτομένη του x	$\cot x = 1 / \tan x$
$\sec x$	τέμνουσα του x	$1 / \cos x$
$\csc x$	συντέμνουσα του x	Χρησιμοποιείται και το $\mathrm{cosec}\, x$. $\csc x = 1 / \sin x$
$\arcsin x$	τόξο ημιτόνου x	Αν $y = \arcsin x$ τότε $x = \sin y$ και $-\pi/2 \le y \le \pi/2$.
$\arccos x$	τόξο συνημιτόνου x	Αν $y = \arccos x$ τότε $x = \cos y$ και $0 \le y \le \pi$.
$\arctan x$	τόξο εφαπτομένης x	Χρησιμοποιείται και το $\mathrm{arctg}\, x$. Αν $y = \arctan x$ τότε $x = \tan y$ και $-\pi/2<y < \pi/2$.
$\mathrm{arccot}\, x$	τόξο συνεφαπτομένης x	Αν $y = \mathrm{arccot}\, x$ τότε $x = \cot y$ και $0 < y < \pi$.
$\mathrm{arcsec}\, x$	τόξο τέμνουσας του x	Αν $y = \mathrm{arcsec}\, x$ τότε $x = \sec y$ και $0 \le y \le \pi$, $y \ne \pi/2$.
$\mathrm{arccsc}\, x$	τόξο συντέμνουσας x	Χρησιμοποιείται και το $\mathrm{arccosec}\, x$. Αν $y = \mathrm{arccsc}\, x$ τότε $x = \csc y$ και $-\pi/2 \le y \le \pi/2, y \ne 0$.
$\sinh x$	υπερβολικό ημίτονο του x	Χρησιμοποιείται και το $\mathrm{sh}\, x$.
$\cosh x$	υπερβολικό συνημίτονο του x	Χρησιμοποιείται και το $\mathrm{ch}\, x$.
$\tanh x$	υπερβολική εφαπτομένη του x	Χρησιμοποιείται και το $\mathrm{th}\, x$.
$\coth x$	υπερβολική συνεφαπτομένη του x	$\coth x = 1 / \tanh x$
$\mathrm{sech}\, x$	υπερβολική τέμνουσα του x	$\mathrm{sech}\, x = 1 / \cosh x$
$\mathrm{csch}\, x$	υπερβολική συντέμνουσα του x	Χρησιμοποιείται και το $\mathrm{cosech}\, x$. $\mathrm{csch}\, x = 1 / \sinh x$
$\mathrm{arsinh}\, x$	αντίστροφο υπερβολικό ημίτονο	Χρησιμοποιούνται και τα $\mathrm{arsh}\, x, \mathrm{argsh}\, x$.

Συνέχεια του Πίνακα 16

$\operatorname{arcosh} x$	αντίστροφο υπερβολικό συνημίτονο του x	Χρησιμοποιούνται και τα $\operatorname{arch} x$, $\operatorname{argch} x$. Αν $y = \operatorname{arcosh} x$ τότε $x = \cosh y$, $y \geq 0$.
$\operatorname{artanh} x$	αντίστροφη υπερβολική εφαπτομένη του x	Χρησιμοποιούνται και τα $\operatorname{arth} x$, $\operatorname{argth} x$.
$\operatorname{arcoth} x$	αντίστροφη υπερβολική συνεφαπτομένη του x	Χρησιμοποιείται και το $\operatorname{argcoth} x$. Αν $y = \operatorname{arcoth} x$ τότε $x = \coth y$ και $y \neq 0$.
$\operatorname{arsech} x$	αντίστροφη υπερβολική τέμνουσα του x	Αν $y = \operatorname{arsech} x$ τότε $x = \operatorname{sech} y$ και $y \geq 0$.
$\operatorname{arcsch} x$	αντίστροφη υπερβολική συντέμνουσα του x	Χρησιμοποιείται και το $\operatorname{arcosech} x$. Αν $y = \operatorname{arcsch} x$ τότε $x = \operatorname{csch} y$ και $y \neq 0$.

Στον Πίνακα 17 δίνονται οι εκθετικές και λογαριθμικές συναρτήσεις.

Πίνακας 17

Εκθετικές και λογαριθμικές συναρτήσεις

Σύμβολο	Σημασία	Σχόλια και παραδείγματα
a^x	εκθετική συνάρτηση του x με βάση το a	
e	βάση των φυσικών λογαρίθμων	$\mathrm{e} = 2,718\ 281\ 8...$
e^x, $\exp x$	εκθετική συνάρτηση του x με βάση το e	
$\log_a x$	λογάριθμος του x με βάση το a	Το $\log x$ χρησιμοποιείται μόνο όταν δεν χρειάζεται ο καθορισμός της βάσης.
$\ln x$	$\ln x = \log_{\mathrm{e}} x$, φυσικός λογάριθμος του x	
$\lg x$	$\lg x = \log_{10} x$, κοινός (δεκαδικός) λογάριθμος	
$\operatorname{lb} x$	$\operatorname{lb} x = \log_2 x$, δυαδικός λογάριθμος του x	

Σημειώνομε ότι τα ορίσματα μαθηματικών συναρτήσεων όπως των τριγωνομετρικών, των υπερβολικών τον λογαρίθμων των εκθετικών και άλλων πρέπει να είναι (καθαροί) αριθμοί, δηλαδή αδιάστατα μεγέθη, επίσης οι τιμές τους είναι καθαροί αριθμοί. Μερικές φορές μπορεί να εμφανίζεται κάπου ο λογάριθμος φυσικού μεγέθους το οποίο δεν είναι αδιάστατο, τότε όμως σίγουρα (πρέπει να) υπάρχει και άλλος λογάριθμος που αφαιρείται από τον πρώτο, ο οποίος επίσης έχει όρισμα με τις ίδιες διαστάσεις που έχει το όρισμα του προηγούμενου λογαρίθμου. Ένα παράδειγμα είναι η εκφόρτιση πυκνωτή σε κύκλωμα RC που περιγράφεται από τη σχέση

$$V = V_0 \mathrm{e}^{-t/(RC)} \quad .$$

Αυτή η σχέση μπορεί να γραφτεί στη μορφή

$$\ln\frac{V}{V_0} = -\frac{t}{RC} \quad .$$

Η γραφή $\ln V = \ln V_0 - \dfrac{t}{RC}$ πρέπει να αποφεύγεται. Με χρήση της μονάδας μέτρησης της τάσης V (έστω volt, V) μπορούμε να γράψομε

$$\ln\frac{V}{\mathrm{V}} \text{ διότι το πηλίκο } \frac{V}{\mathrm{V}} \text{ είναι καθαρός αριθμός.}$$

Αντιστοίχως, για την ενέργεια μετρούμενη σε joule (J) μπορούμε να γράψομε $\ln(E/\mathrm{J})$, αν η μονάδα είναι GeV γράφομε, $\ln\left(E/\mathrm{GeV}\right)$ κτλ.

Επισήμανη: Έστω η σχέση $y = f(x)$ μεταξύ δυο φυσικών μεγεθών x, y. Η παράγωγος $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$ είναι η κλίση στη θέση $x, f(x)$ τις καμπύλης που παριστάνει αυτή τη σχέση. Γενικώς αν τα x, y έχουν διαφορετικές διαστάσεις, η κλίση δεν είναι εφαπτομένη κάποιας γωνίας. Σε αυτή την περίπτωση η κλίση έχει διαστάσεις και από αυτό και μόνον δε μπορεί να είναι εφαπτομένη γωνίας, η εφαπτομένη γωνίας ($\tan\varphi$) είναι αδιάστατο μέγεθος όπως είναι και η ίδια η γωνία. Για να μπορεί η κλίση να είναι ίση με εφαπτομένη γωνίας πρέπει να ισχύουν τα παρακάτω. Τα δυο μεγέθη x, y πρέπει να έχουν ίδιες διαστάσεις, οπότε η κλίση είναι αδιάστατος αριθμός, τότε αν οι κλίμακες των αξόνων όπου γίνεται η γραφική παράσταση είναι ίδιες, η κλίση είναι η εφαπτομένη τις γωνίας που σχηματίζει η εφαπτόμενη ευθεία στην καμπύλη, στο σημείο $x, y = f(x)$, με τον άξονα x. Ας δούμε ένα απλό παράδειγμα. Έστω ότι η έκφραση $y = f(x)$ παριστάνει τη διαδρομή σημείου στο επίπεδο x,y και τα x, y μετριούνται σε km. Υποθέτομε ότι οι άξονες έχουν την ίδια κλίμακα (π.χ. 1 cm στον κάθε άξονα αντιστοιχεί σε 1 km μετατόπισης) , τότε η κλίση τις καμπύλης σε ένα σημείο ισούται με την εφαπτομένη τις γωνίας που αναφέραμε προηγουμένως. Στην περίπτωση γραμμικής σχέσης, $y = a\,x + b$, a, b σταθερές, η $a = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ είναι η κλίση τις σχετικής καμπύλης και είναι εφαπτομένη τις γωνίας που σχηματίζει η ευθεία με τον άξονα x όταν ισχύουν τα παραπάνω. Σημειώνομε ότι η γωνία (και η εφαπτομένη της) πρέπει να είναι αναλλοίωτα μεγέθη, δηλαδή να μην εξαρτώνται από τις θεμελιώδεις μονάδες μέτρησης. Μπορεί εύκολα να διαπιστωθεί ότι αν τα μεγέθη δεν έχουν ίδιες διαστάσεις και ίδιες μονάδες μέτρησης, και κάποιος επιχειρήσει να σχεδιάσει την καμπύλη λαμβάνοντας υπόψη τις αριθμητικές τιμές των μεγεθών θα διαπιστώσει ότι η κλίση και επομένως και η παραπάνω γωνία θα εξαρτώνται από τις μονάδες των θεμελιωδών μεγεθών.

Στον Πίνακα 18 φαίνονται τα περί διανυσμάτων και τανυστών.

Πίνακας 18

Διανύσματα και τανυστές

Σύμβολο	Σημασία	Σχόλια και παραδείγματα
$\boldsymbol{a}, \vec{a}$	διάνυσμα $\boldsymbol{a}$ ($\vec{a}$)	Το $\vec{a}$ είναι βολικό για γράψιμο με το χέρι.
$a, \lvert\boldsymbol{a}\rvert$	μέτρο του διανύσματος $\boldsymbol{a}$	Χρησιμοποιείται και το $\lVert\boldsymbol{a}\rVert$.
$\boldsymbol{e}_a, \vec{e}_a$	μοναδιαίο διάνυσμα στην κατεύθυνση του $\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{e}_a = \boldsymbol{a}/a, \boldsymbol{a} = a\boldsymbol{e}_a$
$\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z$ $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ $\boldsymbol{e}_i$	μοναδιαίο διάνυσμα στις κατευθύνσεις των καρτεσιανών αξόνων συντεταγμένων	
a_x, a_y, a_z a_i	καρτεσιανές συνιστώσες του διανύσματος $\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{e}_x + a_y\boldsymbol{e}_y + a_z\boldsymbol{e}_z$ $a_x\boldsymbol{e}_x$, κτλ είναι οι διανυσματικές συνιστώσες $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{e}_x + y\boldsymbol{e}_y + z\boldsymbol{e}_z$ είναι το διάνυσμα θέσης
∇ ή $\vec{\nabla}$	τελεστής ανάδελτα	$\nabla = \boldsymbol{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{e}_z \frac{\partial}{\partial z} = \sum_i \boldsymbol{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ ή $\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}$
$\nabla\varphi$, **grad** φ	κλίση του φ	
$\nabla \cdot \boldsymbol{a}$, div $\boldsymbol{a}$	απόκλιση του $\boldsymbol{a}$	
$\nabla \times \boldsymbol{a}$, **rot** $\boldsymbol{a}$, **curl** $\boldsymbol{a}$	στροβιλισμός του $\boldsymbol{a}$	
∇^2, Δ	λαπλασιανή	$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

Συνέχεια του Πίνακα 18

$\boldsymbol{T}$, $\vec{\vec{T}}$	τανυστής $\boldsymbol{T}$ δεύτερης τάξης
$T_{xx}, T_{xy}, \ldots, T_{zz}$ ή T_{ij}	καρτεσιανές συνιστώσες του τανυστή $\boldsymbol{T}$
$\boldsymbol{ab}$ $\quad \boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b}$	δυαδικό γινόμενο ή τανυστικό γινόμενο των διανυσμάτων $\boldsymbol{a}$ και $\boldsymbol{b}$
$\boldsymbol{T} \otimes \boldsymbol{S}$	τανυστικό γινόμενο των τανυστών $\boldsymbol{T}$ και $\boldsymbol{S}$ δεύτερης τάξης
$\boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{S}$	εσωτερικό γινόμενο των τανυστών $\boldsymbol{T}$ και $\boldsymbol{S}$ δεύτερης τάξης
$\boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{a}$	εσωτερικό γινόμενο του τανυστή $\boldsymbol{T}$ δεύτερης τάξης και του διανύσματος $\boldsymbol{a}$
$\boldsymbol{T} : \boldsymbol{S}$	βαθμωτό (scalar) γινόμενο των τανυστών $\boldsymbol{T}$ και $\boldsymbol{S}$ δεύτερης τάξης

Στον Πίνακα 19 φαίνονται τα σχετικά με τα ποιο συνήθη συστήματα συντεταγμένων.

Πίνακας 19

Συνήθη συστήματα συντεταγμένων

Σύμβολο και όνομα	Διάνυσμα θέσης και το διαφορικό του	Σχόλια
καρτεσιανές x, y, z	$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{e}_x + y\boldsymbol{e}_y + z\boldsymbol{e}_z$	όλα τα μοναδιαία διανύσματα σχηματίζουν ένα ορθοκανονικό σύστημα

	$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \mathrm{d}x\boldsymbol{e}_x + \mathrm{d}y\boldsymbol{e}_y + \mathrm{d}z\boldsymbol{e}_z$	
κυλινδρικές ρ, φ, z	$\boldsymbol{r} = \rho\boldsymbol{e}_\rho + z\boldsymbol{e}_z$	$\boldsymbol{e}_\rho = \boldsymbol{e}_\rho(\varphi), \boldsymbol{e}_\varphi = \boldsymbol{e}_\varphi(\varphi)$
	$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \mathrm{d}\rho\boldsymbol{e}_\rho + \rho\mathrm{d}\varphi\boldsymbol{e}_\varphi + \mathrm{d}z\boldsymbol{e}_z$	
σφαιρικές r, ϑ, φ	$\boldsymbol{r} = r\boldsymbol{e}_r$	$\boldsymbol{e}_r = \boldsymbol{e}_r(\vartheta,\varphi), \boldsymbol{e}_\vartheta = \boldsymbol{e}_\vartheta(\vartheta,\varphi),$
	$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \mathrm{d}r\,\boldsymbol{e}_r + r\,\mathrm{d}\vartheta\,\boldsymbol{e}_\vartheta + r\sin\vartheta\,\mathrm{d}\varphi\,\boldsymbol{e}_\varphi$	$\boldsymbol{e}_\varphi = \boldsymbol{e}_\varphi(\varphi)$

Στον Πίνακα 20 φαίνονται τα σχετικά με τις μήτρες.

Πίνακας 20

Μήτρες

Σύμβολο	Σημασία	Σχόλια και παραδείγματα
		Μπορεί να χρησιμοποιούνται κεφαλαία και πεζά γράμματα. Μπορεί να χρησιμοποιούνται αντί για παρενθέσεις αγκύλες [ ].
$\boldsymbol{A}$ ή $\begin{pmatrix} A_{11}\ldots A_{1n} \\ . \quad\quad . \\ . \quad\quad . \\ . \quad\quad . \\ A_{m1}\ldots A_{mn} \end{pmatrix}$	μήτρα $\boldsymbol{A}$ τύπου m επί n	Χρησιμοποιείται και $\boldsymbol{A} = \left(A_{ij}\right)$.
$\boldsymbol{AB}$	γινόμενο των μητρών $\boldsymbol{A}$ και $\boldsymbol{B}$	$\left(\boldsymbol{AB}\right)_{ik} = \sum_j A_{ij}B_{jk}$
$\boldsymbol{E}$ $\boldsymbol{I}$	μοναδιαία μήτρα	
$\boldsymbol{A}^{-1}$	αντίστροφη τετραγωνικής μήτρας	
$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ $\tilde{\boldsymbol{A}}$	ανάστροφη της $\boldsymbol{A}$	
$\boldsymbol{A}^*$	συζυγής μιγαδική της $\boldsymbol{A}$	
$\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}$ $\boldsymbol{A}^\dagger$	συζυγής ερμιτιανή της $\boldsymbol{A}$	
$\det\boldsymbol{A}$ ή $\begin{vmatrix} A_{11}\ldots A_{1n} \\ . \quad\quad . \\ . \quad\quad . \\ . \quad\quad . \\ A_{n1}\ldots A_{nn} \end{vmatrix}$	ορίζουσα της ορθογώνιας μήτρας $\boldsymbol{A}$	

Συνέχεια του Πίνακα 20.

$\mathrm{tr}\ \boldsymbol{A}$	ίχνος της τετραγωνικής μήτρας $\boldsymbol{A}$	
$\lVert\boldsymbol{A}\rVert$	νόρμ της μήτρας $\boldsymbol{A}$	μπορεί να οριστεί η νορμ με πολλούς τρόπους π.χ. $\lVert\boldsymbol{A}\rVert=\left(\mathrm{tr}\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\right)\right)^{1/2}$

10. Σημαντικά ψηφία, στρογγυλοποίηση αριθμητικών τιμών

Θεωρούμε ότι οι αριθμητικές τιμές (οι αριθμοί) είναι γραμμένοι όπως φαίνεται στον παρακάτω Πίνακα 21.

Πίνακας 21

Γραφή αριθμών

α) $\pm$...XXX XXX,XXX XXX...
β) $\pm$XXX XXX XXX...
γ) $\pm$...XXX XXX, XXX XXX...$\times 10^{n}$ $\quad n=$ ακέραιος
δ) $\pm$XXX XXX XXX...$\times 10^{n}$ $\quad n=$ ακέραιος.

Δηλαδή πρόκειται για α) ένα δεκαδικό αριθμό ή β) ακέραιο ή γ) δεκαδικό με πολλαπλασιαστή δύναμη του δέκα ή δ) ακέραιο με πολλαπλασιαστή δύναμη του δέκα.

Τα σημαντικά ψηφία του αριθμού είναι αυτά που σημειώνονται στον Πίνακα 21 με ...XXX... .

Με τον όρο σημαντικά θεωρούνται γενικώς εκείνα από τα ψηφία ...XXX... του αριθμού τα οποία είναι λίγο πολύ «γνωστά». Δεν θα σχολιάσομε περισσότερο αυτό το θέμα. Θα θεωρούμε ότι οι δεδομένοι αριθμοί είναι γραμμένοι με όλα τα ...XXX... να είναι τα σημαντικά τους ψηφία.

Υπάρχουν οι εξής συμβατικοί κανόνες σχετικά με τα σημαντικά ψηφία.

α) Όλα τα μη μηδενικά ψηφία ενός αριθμού είναι σημαντικά ψηφία.

β) Τα μηδέν μεταξύ μη μηδενικών ψηφίων είναι σημαντικά.

γ) Τα μηδέν πριν από το πρώτο μη μηδενικό ψηφίο δεν είναι σημαντικά ψηφία.

δ) Τα μηδέν μετά το τελευταίο ψηφίο που δεν είναι ίσο με μηδέν είναι σημαντικά μόνον αν υπάρχει το σημάδι των δεκαδικών στον αριθμό. Αυτός ο κανόνας είναι καλό να τηρείται διότι στην αντίθετη περίπτωση υπάρχει γενικώς ασάφεια ως προς πόσα από τα τελευταία μηδενικά είναι σημαντικά. Συνιστάται η χρήση κατάλληλου πολλαπλασιαστή που είναι δύναμη του δέκα.

Σύμφωνα με αυτούς τους κανόνες έχομε για τους αριθμούς που ακολουθούν το αντίστοιχο πλήθος σημαντικών ψηφίων.

1,35	3 σημαντικά ψηφία
- 0,107	3 σημαντικά ψηφία
0,050 20	4 σημαντικά ψηφία
- 500	1 σημαντικό ψηφίο
500,0	4 σημαντικά ψηφία
50×10^1	1 σημαντικό ψηφίο
5×10^2	1 σημαντικό ψηφίο
$1,520\times10^5$	4 σημαντικά ψηφία
152 000	3 σημαντικά ψηφία
$-1,7\times10^{-4}$	2 σημαντικά ψηφία

Αν έχομε τον αριθμό 0,516 784 252 και θέλομε να τον στρογγυλοποιήσομε ώστε να έχει τρία σημαντικά ψηφία τότε τον αντικαθιστούμε με τον «πλησιέστερό» του αριθμό με τρία σημαντικά. Αυτός είναι ο 0,517. Αυτή είναι στρογγυλοποίηση προς τα άνω διότι ο τελικός αριθμός είναι μεγαλύτερος του αρχικού. Ο αριθμός 1,723 στρογγυλοποιείται σε αριθμό με δυο σημαντικά που είναι ο 1,7. Τώρα έχομε στρογγυλοποίηση προς τα κάτω διότι ο τελικός αριθμός είναι μικρότερος του αρχικού. Αν έχομε τον αριθμό 1,75 και πρέπει να τον στρογγυλέψομε σε δυο σημαντικά, τότε μπορούμε να τον στρογγυλέψομε προς τα πάνω και να πάρομε τον 1,8 . Πολλοί προτιμούν αυτή τη λύση η οποία εφαρμόζεται στους υπολογιστές. Μια άλλη μέθοδος είναι να κάνομε τη στρογγυλοποίηση στον κοντινότερο αριθμό με το τελευταίο ψηφίο ζυγό. Αυτό βοηθά σε περιπτώσεις όπως όταν έχομε να επεξεργαστούμε σειρά από πολλά δεδομένα οπότε η διαδικασία αυτή οδηγεί σε μικρότερα σφάλματα στρογγυλοποίησης διότι (σχεδόν) οι μισές στρογγυλοποιήσεις θα είναι προς τα πάνω και οι άλλες μισές προς τα κάτω.

Πολλές φορές έχομε αριθμητικές τιμές που είναι γνωστές με άπειρα σημαντικά ψηφία. Σε τέτοιες περιπτώσεις λέμε ότι για παράδειγμα ο αριθμός είναι ακριβώς, π.χ. 2 ακριβώς. Συνήθως αυτό φαίνεται από τα «συμφραζόμενα» π.χ. $2L$, εδώ το 2 είναι ακριβώς και όχι με μόνο ένα σημαντικό ψηφίο όπως φαίνεται εκ πρώτης όψεως. Το π θεωρείται γνωστό με άπειρα σημαντικά, παρόλο που σε πράξεις μπορεί να χρησιμοποιούμε λίγα σημαντικά ψηφία του.

Θα πούμε δυο λόγια για το πλήθος των σημαντικών ψηφίων που έχει ο αριθμός που προκύπτει από τον πολλαπλασιασμό και διαίρεση δυο ή περισσοτέρων αριθμών οι οποίοι δίνονται με συγκεκριμένα σημαντικά ψηφία. Ο ένας αριθμός έχει το ελάχιστο πλήθος από σημαντικά ψηφία από τους άλλους, ο αριθμός που προκύπτει δε μπορεί να έχει περισσότερα σημαντικά από αυτό το ελάχιστο πλήθος. Στην πράξη λαμβάνεται να έχει αυτό το ελάχιστο πλήθος σημαντικών. Προφανώς μπορεί περισσότεροι του ενός να έχουν το ελάχιστο πλήθος σημαντικών ψηφίων.

Παραδείγματα

$$0,851\times 0,80 = 0,68$$
$$-3,25\times 0,21/0,8 = -0,9$$
$$0,0752/0,012 = 6,3$$
$$1,35\times 10^4\times(0,73/(0,2\times 10^1))\times 10^2 = 0,5\times 10^2.$$

Τώρα θα μιλήσομε για τον αριθμό που προκύπτει από την πρόσθεση και αφαίρεση δυο ή περισσότερων δεδομένων αριθμών. Ξέρομε τα σημαντικά ψηφία του κάθε αριθμού. Στη συνέχεια, ανεξάρτητα από πόσα και ποια είναι τα σημαντικά ψηφία του αριθμού τον γράφομε ως δεκαδικό (ή ακέραιος) χωρίς πολλαπλασιαστή. Ο γραμμένος αριθμός διαβάζεται από αριστερά προς τα δεξιά. Το πρώτο σημαντικό ψηφίο ενός αριθμού το οποίο είναι και το ψηφίο της ανώτερης τάξης είναι το πιο αριστερό του σημαντικό ψηφίο, το τελευταίο σημαντικό ψηφίο του αριθμού είναι το πιο δεξιό του σημαντικό ψηφίο και είναι το ψηφίο της κατώτερης τάξης.

Σε αυτή την περίπτωση αυτό που χρειάζεται να εξετάσομε είναι η τάξη του τελευταίου σημαντικού ψηφίου κάθε αριθμού (ελάχιστη τάξη ψηφίων του αριθμού). Βρίσκομε τελικώς την μέγιστη από αυτές τις ελάχιστες τάξεις για όλους τους αριθμούς. Ο αριθμός που είναι το αποτέλεσμα των προσθέσεων και αφαιρέσεων δε μπορεί να έχει ψηφία με μικρότερη τάξη από αυτή τη μέγιστη τάξη. Στην πράξη παίρνομε ψηφία μέχρι και τη μέγιστη τάξη.

Παραδείγματα

10,001 ελάχιστη τάξη 10^{-3} (χιλιοστά)

0,0003 ελάχιστη τάξη 10^{-4} (δέκατα του χιλιοστού)

0,85 ελάχιστη τάξη 10^{-2} (εκατοστά)

Μέγιστη τάξη μεταξύ αυτών είναι η 10^{-2} (εκατοστά),

άρα 10,001 + 0,0003 - 0,85 = 9,15

124 ελάχιστη τάξη 10^{0} (μονάδες)

$5{,}0\times10^{2}$ ελάχιστη τάξη 10^{1} (δεκάδες), βλέπε παρακάτω

7,8 ελάχιστη τάξη 10^{-1} (δέκατα)

Μέγιστη τάξη αυτών των αριθμών είναι 10^{1} (δεκάδες) άρα

$124-5{,}0\times10^{2}+7{,}8=-3{,}7\times10^{2}$.

Εξηγούμε τι συμβαίνει με τον αριθμό $5{,}0\times10^{2}$. Σε αυτόν τον αριθμό υπάρχουν δυο σημαντικά ψηφία το 5 και το διπλανό του, προς τα δεξιά μας, 0.

Ο αριθμός σε μορφή δεκαδικού, εδώ ακέραιου, είναι 500. Σύμφωνα με τα προηγούμενα μόνο τα δυο πρώτα ψηφία είναι σημαντικά, άρα η ελάχιστη τάξη είναι η τάξη του μηδενός που είναι δίπλα στο 5, δηλαδή η τάξη των δεκάδων οπότε

$5{,}0\times10^{2}$ ελάχιστη τάξη 10^{1} (δεκάδες).

Όταν κάνομε πολλές πράξεις στρογγυλοποιούμε μόνο το τελικό αποτέλεσμα όχι τους αριθμούς στα ενδιάμεσα βήματα.

11. Συνοπτικός οδηγός χρήσης του SI

Η τυποποίηση έχει σκοπό να αποτελέσει μια διεθνή γλώσσα της επιστήμης και της τεχνολογίας, την οποία να καταλαβαίνουν όλοι ανεξάρτητα από τη γλώσσα που χρησιμοποιούν και τη γραφή της γλώσσας τους. Για παράδειγμα, τα σύμβολα των μονάδων είναι τα ίδια ανεξάρτητα του πως προφέρεται το όνομα της μονάδας και πως γράφεται στις διάφορες γλώσσες.

Ξεκινούμε με τη γραφή αριθμών. Σε όλες τις ευρωπαϊκές γραφές των γλωσσών τους το δεκαδικό σύμβολο είναι το , δηλαδή το κόμμα. Στην αγγλική γραφή συνηθίζεται το δεκαδικό σύμβολο να είναι το . δηλαδή η κάτω τελεία. Σημειώνομε ότι ο ISO (Διεθνής Οργανισμός Τυποποίησης) έχει συστήσει να χρησιμοποιείται το κόμμα ακόμη και στα αγγλικά κείμενα

Σημειώνομε ότι οι αριθμοί γράφονται με όρθια σύμβολα.

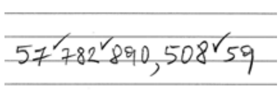
Ομάδες τριών ψηφίων σε αριθμούς με περισσότερα από τέσσερα ψηφία διαχωρίζονται με κατά προτίμηση μικρά (ή μεγάλα) κενά. Δεν χρησιμοποιούνται κάτω τελείες (στις μη αγγλικές γραφές), ούτε κόμματα (στην αγγλική γραφή). Αυτό βοηθά στο να μην υπάρχουν, σε μερικές περιπτώσεις, αμφιβολίες στο τι παριστάνουν αυτά τα δυο σημάδια. Δηλαδή γίνεται χρήση του ενός μόνο σημαδιού. Για παράδειγμα γράφομε στην ελληνική γραφή μας

345 784 655

579,438 675

$306{,}370\times10^{3}$

Επειδή όταν γράφομε με το χέρι είναι δύσκολο να βάζομε διάκενα, κάποιοι χρησιμοποιούν στο πάνω μέρος το σημάδι του μαρκαρίσματος δηλαδή γράφουν $57^{\vee}782^{\vee}890{,}508^{\vee}59$, πιο σωστά



Αυτό μέχρι σήμερα δεν έχει υιοθετηθεί διεθνώς. Η ιδέα είναι να χρησιμοποιείται κάτι πολύ διαφορετικό που να μην είναι ούτε η κάτω τελεία ούτε το κόμμα. Κατά τα γνωστά, οι ομάδες ανά τρία ψηφία ξεκινούν από το δεκαδικό ψηφίο, αν υπάρχει, και προχωρούν προς τα μεγαλύτερης τάξης και προς τα μικρότερης τάξης ψηφία. Σε έναν ακέραιο οι τριάδες ξεκινούν από το μικρότερης τάξης ψηφίο 35 894 653 .

Αν ο αριθμός είναι ακέραιος με τέσσερα ψηφία αυτά μπορεί να μην χωρίζονται σε τριάδα συν ένα, αλλά μπορεί να γράφονται και ως τετράδα

π.χ. 3475 ή 3 475

1821 ή 1 821

Επίσης, αν στον αριθμό υπάρχει σημάδι δεκαδικών, τότε αν τα τελευταία ψηφία είναι τέσσερα μπορεί να γράφονται ως τετράδα, π.χ. 23 692,761 7041 ή 23 692,761 704 1 . Το ίδιο ισχύει και για τα πρώτα ψηφία του αριθμού, αν υπάρχει σημάδι δεκαδικών, δηλαδή μπορεί να γραφτεί 2365 458,35 ή 2 365 458,35 . Αυτά τα τελευταία κατά κάποιον τρόπο μπορούμε να πούμε ότι υπαγορεύονται και για λόγους αισθητικής. Για παράδειγμα, σας αρέσει να γράψετε τη χρονολογία μας στη μορφή 2 015 μ.Χ. ; Η γραφή 2015 μ.Χ. νομίζω πως είναι αισθητικά καλύτερη.

Μεταξύ αριθμητικής τιμής και μονάδας μέτρησης υπάρχει κατά προτίμηση μικρό (ή ολόκληρο) διάστημα, το ίδιο ισχύει για διάφορα σύμβολα όπως τα $=$, $>$, $<$ κτλ , π.χ. $l = 35\ \mathrm{m}$.

Επίσης γράφομε 75 % .

Στους βαθμούς Κελσίου κτλ, γράφομε τη μονάδα ως εξής

$^{\mathrm{o}}\mathrm{C}$, οπότε έχομε $t = -32\ ^{\mathrm{o}}\mathrm{C}$.

Το kelvin έχει ως σύμβολο το K και δεν αναφέρεται ως βαθμοί Κέλβιν, απλώς λέμε

35 κέλβιν, 35 K .

Εξαίρεση του κανόνα του διαστήματος υπάρχει στις περιπτώσεις των παρακάτω μονάδων γωνιών όπως φαίνεται στα αντίστοιχα παραδείγματα.

5^{o} , $4'$, $8''$.

Τα σύμβολα των μεγεθών (ποσοτήτων) είναι συνήθως ένα γράμμα του ελληνικού ή του λατινικού αλφάβητου ανεξάρτητα από τη γλώσσα του κειμένου, με πλάγια γραφή. Μπορεί τα σύμβολα να έχουν δείκτες ή άλλα σημάδια διαφοροποίησης. Αν ο δείκτης αντιπροσωπεύει μια φυσική ποσότητα είναι γραμμένος ως πλάγιο σύμβολο, οι άλλοι δείκτες είναι με όρθια γραφή. Οι αριθμοί δείκτες είναι όρθιοι, όμως γράμματα δείκτες που παριστάνουν αριθμούς γράφονται πλάγια. Παραδείγματα φαίνονται παρακάτω.

C_{g} (g: gas) C_p (p: pressure)
g_{n} (n: normal) $\sum_n a_n\theta_n$ (n: τρέχων δείκτης)
μ_{r} (r: relative) $\sum_x a_x\theta_x$ (x: τρέχων δείκτης)
E_{k} (k: kinetic) g_{ik} (i, k: τρέχοντες δείκτες)
χ_{e} (e: electric) p_x (x: συντεταγμένη $- x$)
$T_{1/2}$ (1/2: μισό) I_λ (λ: πλάγιο διότι είναι το μήκος κύματος)

Γινόμενα (βαθμωτών, μονόμετρων) ποσοτήτων γράφονται όπως παρακάτω.

$ab,\ a\,b,\ a\cdot b,\ a\times b$.

Για διανύσματα έχομε τα γνωστά $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$.

Η διαίρεση δυο ποσοτήτων μπορεί να δείχνεται ως εξής

$\frac{a}{b},\ a/b,\ ab^{-1}$. Αυτή η διαδικασία μπορεί να επεκταθεί σε περιπτώσεις που οι ποσότητες είναι πηλίκα ή γινόμενα άλλων ποσοτήτων. Σε τέτοιες περιπτώσεις το σημάδι / της διαίρεσης δεν πρέπει να ακολουθείται από σημάδι πολλαπλασιασμού ή σημάδι διαίρεσης στην ίδια γραμμή εκτός αν χρησιμοποιηθεί παρένθεση για την αποφυγή ασάφειας. Παραδείγματα είναι τα παρακάτω.

$$\frac{ab}{c} = ab/c = abc^{-1}$$

$$\frac{a/b}{c} = (a/b)/c = ab^{-1}c^{-1}, \text{ όχι } a/b/c$$

όμως γράφομε $\frac{a/b}{c/d} = \frac{ad}{bc}$

$$\frac{a}{bc} = a/(b\cdot c) = a/bc \text{ αλλά όχι } a/b\cdot c$$

Όταν μπορεί να υπάρξουν αμφιβολίες καλό είναι να χρησιμοποιούνται κατάλληλα παρενθέσεις.

Τα διεθνή σύμβολα των μονάδων είναι υποχρεωτικά. Τα σύμβολα των μονάδων με ειδικό όνομα (και ειδικό σύμβολο) είναι υποχρεωτικά όρθια γράμματα πεζά και δεν γράφονται στον πληθυντικό. Για λόγους ιστορικούς η θεμελιώδης μονάδα για τη μάζα είναι το χιλιόγραμμο με σύμβολο που αποτελείται από δυο πεζά γράμματα kg , επίσης χρησιμοποιούνται δυο ή περισσότερα γράμματα όταν υπάρχει και άλλη μονάδα με το ίδιο σύμβολο και γενικώς για αποφυγή παρανοήσεων.

Κατ εξαίρεση το πρώτο γράμμα στο σύμβολο της μονάδας είναι με κεφαλαίο αν προέρχεται από κύριο όνομα.

Επίσης για το λίτρο μπορεί να χρησιμοποιείται και το κεφαλαίο L αντί του μικρού l για να μην υπάρχει σύγχυση με το ένα, 1.

Τα ονόματα των μονάδων γράφονται με μικρά γράμματα ακόμη και αν προέρχονται από κύρια ονόματα. Παρακάτω φαίνονται διάφορα παραδείγματα.

m (meter, μέτρο)
s (second, δευτερόλεπτο)
A (ampere, αμπέρ)
Wb (weber, βέμπερ)
W (watt, βατ έχει επικρατήσει στα ελληνικά αντί του αγγλικού γουάτ)
kg (kilogram, χιλιόγραμμο)
V (volt, βολτ)
Ω (ohm, ωμ)
S (siemens, ζήμενς)
H (henry, χένρυ)
J (joule, τζουλ)
L,l (liter, λίτρο)
lm (lumen, λούμεν)
lx (lux, λουξ)
rad (radian, ακτίνιο)
sr (steradian, στερακτίνιο)
N (newton, νιούτον)

Γράφομε $V = 240\ \mathrm{V}$, που σημαίνει ότι η τάση V (φυσικό μέγεθος με πλάγιο σύμβολο) ισούται με 240 V, η μονάδα είναι το volt (βολτ) με σύμβολο V όρθιο γράμμα. Για διανυσματικά μεγέθη μπορούμε να γράψομε
$F = (F_x, F_y, F_z) = (3\ \mathrm{N},\ -2\ \mathrm{N},\ 5\ \mathrm{N}) = (3, -2,\ 5)\ \mathrm{N}$.

Στην περίπτωση συνδυασμού συμβόλων για μονάδες, αυτό γίνεται όπως παρακάτω.

$\mathrm{N \cdot m}$ $\mathrm{N\,m}$ ή και Nm . Η τελευταία περίπτωση θέλει προσοχή διότι για παράδειγμα αν γράψομε mN αυτό σημαίνει millinewton και όχι μέτρο επί νιούτον.

Έχομε και εκφράσεις μονάδων όπως οι παρακάτω.

$\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, m/s, $\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}$.

Τα σύμβολα των προθεμάτων είναι όρθια και κολλητά με την μονάδα που ακολουθεί.

Δεν χρησιμοποιούνται δυο προθέματα μαζί.

Η αριθμητική τιμή και το σύμβολο της μονάδας είναι αλγεβρικό γινόμενο και ισχύουν οι γνωστές ιδιότητες της άλγεβρας. Διάφορα παραδείγματα

$1\,\mathrm{nm} = 10^{-9}\,\mathrm{m}$ όχι $1\,\mathrm{m\mu m}$

$1\,\mathrm{cm}^3 = \left(10^{-2}\,\mathrm{m}\right)^3 = 10^{-6}\,\mathrm{m}^3$

$1\,\mathrm{\mu s}^{-1} = \left(10^{-6}\,\mathrm{s}\right)^{-1} = 10^{6}\,\mathrm{s}^{-1}$

$1\,\mathrm{kA/m} = \left(10^{3}\,\mathrm{A}\right)/\mathrm{m} = 10^{3}\,\mathrm{A/m}$

Οι εκφράσεις για αθροίσματα και διαφορές γράφονται ως εξής

$l = 12\,\mathrm{m} - 7\,\mathrm{m} = (12-7)\,\mathrm{m} = 5\,\mathrm{m}$

$t = 28{,}4\ {}^{\circ}\mathrm{C} \pm 0{,}2\ {}^{\circ}\mathrm{C} = (28{,}4 \pm 0{,}2)\ {}^{\circ}\mathrm{C}$

(όχι $28{,}4 \pm 0{,}2\ {}^{\circ}\mathrm{C}$)

$\lambda = 220 \times (1 \pm 0{,}02)\ \mathrm{W/(m \cdot K)}$

Το σύμβολο % υποδηλώνει τον αριθμό 0,01 επομένως έχομε

$R_1 = R_2(1+0{,}5\ \%) = R_2(1+0{,}5 \cdot 0{,}01) = R_2(1+0{,}005) = 1{,}005 R_2$

Καλό είναι να αποφεύγεται η χρήση ονομάτων των μονάδων στις περιπτώσεις που γίνονται πράξεις μεταξύ των τιμών των φυσικών μεγεθών. Όταν είναι αναγκαία η χρήση ονομάτων των μονάδων αντί των διεθνών συμβόλων τους, τα ονόματα αν είναι στη γλώσσα του υπόλοιπου κειμένου μπορεί να είναι και στον πληθυντικό. Αν στην ελληνική, χρησιμοποιείται το όνομα με προφορά ή γραφή άλλης γλώσσας από την ελληνική το όνομα δεν κλίνεται, ούτε χρησιμοποιείται στον πληθυντικό.

Εξαίρεση στα παραπάνω αποτελούν οι μονάδες lux, hertz, siemens που δεν έχουν πληθυντικό.

Οι διάφοροι κανόνες φαίνονται στα παρακάτω.

Στα ελληνικά λέμε και γράφομε 5 αμπέρ ανά δευτερόλεπτο ή στα αγγλικά 5 amperes per second . Πολλές φορές είναι βολικό να χρησιμοποιούνται εκφράσεις και γραφές όπως 5 αμπερ/δευτερόλεπτο ή 5 amperes/second. Καλό είναι, όσο το δυνατόν, να μη γίνεται χρήση τέτοιων εκφράσεων.

Γράφομε 60 μέτρα ανά (ή το) λεπτό αλλά καλό είναι να αποφεύγεται το 60 μέτρα/λεπτό κτλ.

Μπορεί σε ελληνικό κείμενο να γράψομε 65 χιλιόγραμμα ή 65 kilogram, το τελευταίο χωρίς πληθυντικό.

Λέμε και γράφομε σε όλες τις γλώσσες 200 W. Στα αγγλικά μπορούμε να γράψομε 200 watt , ή 200 watts. Στα ελληνικά γράφομε 200 watt ή 200 βατ, χωρίς πληθυντικό .

Όταν οι μονάδες χρησιμοποιούνται με το πλήρες όνομα σε κάποια γλώσσα, τα προθέματα γράφονται «ολογράφως» με πεζά γράμματα, δηλαδή χιλιόμετρο ή kilometer , επίσης μεγαπασκάλ ή megapascal .

Για παράγωγες μονάδες όπως η $\mathrm{Pa\,s} = \mathrm{Pa} \cdot \mathrm{s}$ επιτρέπονται εκφράσεις όπως pascal second ή pascal-second ή πασκάλ δευτερόλεπτο και πασκάλ-δευτερόλεπτο .

Επίσης στα αγγλικά χρησιμοποιούνται εκφράσεις όπως meter per second squared, square centimeter, ampere per square meter, kilogram per cubic meter. Τα αντίστοιχα στα ελληνικά είναι μέτρα ανά δευτερόλεπτο στο τετράγωνο , τετραγωνικό εκατοστό ή εκατοστό στο τετράγωνο, κυβικό χιλιοστό, αμπέρ ανά τετραγωνικό μέτρο, χιλιόγραμμο ανά κυβικό μέτρο .

Τονίζομε τα παρακάτω σχετικά στα περί μαθηματικών συμβόλων. Οι μεταβλητές όπως x, y κτλ, τα σύμβολα που παριστάνουν τρέχοντες αριθμούς όπως το i στο $\sum_i x_i$, γράφονται με πλάγια. Επίσης παράμετροι όπως $a, b,$ κτλ που μπορεί να θεωρηθούν σταθερές σε κάποιες περιπτώσεις, συμβολίζονται με πλάγια γραφή. Το ίδιο ισχύει για συναρτήσεις με τη γενική έννοια της συνάρτησης, π.χ. f, g κτλ.

Όμως μια καθορισμένη μαθηματική συνάρτηση γράφεται με όρθια γραφή. Παραδείγματα, sin, cos, exp, ln, Γ .

Επίσης μαθηματικές σταθερές των οποίων η τιμή δεν αλλάζει γράφονται με όρθια σύμβολα, π.χ. $\mathrm{e} = 2{,}718\,281\,8...$, $\pi = 3{,}141\,592\,6...$, i όπου $\mathrm{i}^2 = -1$.

Επίσης καλά καθορισμένοι τελεστές γράφονται με όρθια γραφή, π.χ. div, ∇ , δ στο δx και τα d στις παραγώγους, όπως $\mathrm{d}f/\mathrm{d}x$. Παρόλο που δεν είναι απαραίτητο είναι καλό να μπαίνουν παρενθέσεις στα ορίσματα συναρτήσεων για να μη δημιουργούνται αμφιβολίες, για παράδειγμα $\sin \pi x$ και $\sin(\pi x)$. Στην πρώτη περίπτωση καλό είναι να υπάρχει το μικρό διάκενο που φαίνεται. Οι ειδικές συναρτήσεις όπως οι $\mathrm{J}_l(x)$, $\mathrm{N}_l(x)$, $\mathrm{P}_l(x)$ κτλ γράφονται με όρθια σύμβολα.

Καλό είναι να χρησιμοποιούνται όσο γίνεται τα συνιστώμενα σύμβολα και για τα μεγέθη. Όμως μπορεί να υπάρχουν αποκλίσεις, διότι διάφορα μεγέθη μπορεί να έχουν το ίδιο σύμβολο. Αν υπάρχει μεγάλη διαφοροποίηση από τα προτεινόμενα σύμβολα καλό είναι να υπάρχει σαφής υπόδειξη στο κείμενο. Στην περίπτωση των μονάδων τα σύμβολα έχουν οριστεί μονοσήμαντα. Τέλος αναφέρομε ότι λέμε λόγος δυο φυσικών μεγεθών αν τα μεγέθη που διαιρεί το ένα το άλλο είναι όμοια οπότε ο λόγος είναι αδιάστατο μέγεθος (είναι αριθμός), αντιστοίχως λέμε πηλίκον δυο μεγεθών αν διαιρούμε ανόμοια μεγέθη οπότε το πηλίκο έχει διαστάσεις. Ο λόγος είναι ειδική περίπτωση του πηλίκου.

Στη συνέχεια λέμε λίγα λόγια για τα σύμβολα τα σχετικά με τα χημικά στοιχεία και τα σωματίδια. Τα σύμβολα των χημικών στοιχείων γράφονται με όρθια γράμματα, το πρώτο είναι κεφαλαίο. Παραδείγματα είναι,

Ca (ασβέστιο), C (άνθρακας), H (υδρογόνο), He (ήλιο), N (άζωτο), Be (βηρύλιο), B (βόριο).

Ο αριθμός νουκλεονίων (μαζικός αριθμός, βαρυονικός αριθμός) ενός νουκλιδίου γράφεται ως αριστερός πάνω δείκτης, π.χ. ${}^{14}\mathrm{N}$, ${}^{16}\mathrm{O}$. Χρησιμοποιείται αριστερός κάτω δείκτης για να δηλωθεί ο αριθμός των πρωτονίων, π.χ. ${}^{235}_{92}\mathrm{U}$. Μερικές φορές στα νουκλίδια δηλώνεται με κάτω δεξιό δείκτη και ο αριθμός των νετρονίων τους. Αυτός ο αριθμός υπολογίζεται από τους δυο προηγούμενους αλλά μερικές φορές είναι χρήσιμο να υπάρχει, έτσι έχομε ${}^{235}_{92}\mathrm{U}_{143}$.

Η σύσταση του ISO για «στοιχειώδη» σωματίδια είναι να συμβολίζονται όπως και τα προηγούμενα με όρθια γράμματα. Μερικά σύμβολα και ονόματα στα ελληνικά και αγγλικά είναι αυτά που φαίνονται παρακάτω.

φωτόνιο photon	γ	νουκλεόνιο nucleon	N
νετρίνο neutrino	$\nu, \nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau$	νετρόνιο neutron	n
ηλεκτρόνιο electron	e, β	πρωτόνιο proton	p ($^1H^+$)
μιόνιο muon	μ	δευτέριο deuteron	d ($^2H^+$)
ταόνιο tauon	τ	τρίτιο triton	t ($^3H^+$)
σωματίδιο ταυ		ήλιο helion	h ($^3He^{2+}$)
πιόνιο pion	π	σωματίδιο άλφα alpha particle	α ($^4He^{2+}$)

Ο δεξιός άνω δείκτης δείχνει το φορτίο σε μονάδες του στοιχειώδους φορτίου το οποίο ισούται με το φορτίο του πρωτονίου. Ανάλογα ισχύουν και για τα άλλα σωματίδια.

Δυστυχώς αυτός ο συμβολισμός δεν έχει γίνει καθολικά αποδεκτός από την κοινότητα των Φυσικών Στοιχειωδών Σωματιδίων (ή Φυσικών Υψηλών Ενεργειών, ΦΥΕ). Για παράδειγμα, στις επίσημες δημοσιεύσεις του CERN δεν τηρείται αυτός ο συμβολισμός, με την έννοια ότι τα σύμβολα γράφονται ως πλάγια γράμματα. Διάφορα βιβλία στο αντικείμενο ακολουθούν τον συμβολισμό που συνιστά ο ISO.

Πολύ περισσότερα μπορεί να βρει ο αναγνώστης στο μεγάλο πλήθος των δημοσιεύσεων του ISO και του SI.

Ας αναφερθούμε λίγο στην ονοματολογία διαφόρων εννοιών.

Μερικά από όσα ακολουθούν σχετίζονται λίγο πολύ με κανόνες γραμματικής και συντακτικού διαφόρων γλωσσών, συμπεριλαμβανομένης της ελληνικής.

Λέμε και γράφομε Joule effect και στα ελληνικά φαινόμενο Τζουλ . Το αρχικό γράμμα είναι κεφαλαίο επειδή στο φαινόμενο έχει δοθεί ως όνομα το όνομα κάποιου προσώπου. Αυτό συνήθως σημαίνει ότι το όνομα έχει δοθεί προς τιμή ανθρώπου που ανακάλυψε το φαινόμενο. Το ίδιο ισχύει για περιπτώσεις όπως Lagrange equations, εξισώσεις Λαγκρανζ. Compton effect, φαινόμενο Κόμπτον.

Αν κάνομε το ίδιο στα ελληνικά με ελληνικά ονόματα προσώπων τα πράγματα είναι κάπως διαφορετικά, δε μπορούμε να πούμε το φαινόμενο Παπαδόπουλος, είναι πιο αποδεκτή η έκφραση το φαινόμενο του Παπαδόπουλου, δηλαδή το φαινόμενο που τιμητικά έχει το όνομά του αφού εκείνος το ανακάλυψε. Μπορούμε να πούμε

Papadopoulos effect. Δε μπορούμε να πούμε η εξίσωση Παπαδόπουλος αλλά η εξίσωση του Παπαδόπουλου, όμως λέμε Papadopoulos equation, κτλ.

Όταν από τη ρίζα του ονόματος προσώπου δημιουργείται όνομα φυσικού μεγέθους τότε το όνομα του φυσικού μεγέθους γράφεται με το πρώτο γράμμα πεζό. Για παράδειγμα λέμε lagrangian, λαγκρανζιανή.

Τα ονόματα των χημικών στοιχείων, των νουκλιδίων και των σωματιδίων γράφονται με το πρώτο γράμμα τους πεζό. Αυτό ισχύει και αν ακόμη το όνομα προέρχεται από όνομα προσώπου. Το σύμβολο γράφεται με το διεθνή συμβολισμό του, με όρθια γράμματα, και το πρώτο του γράμμα είναι κεφαλαίο.

hydrogen υδρογόνο H , helium ήλιο He , fermium φέρμιο Fm, mendelevium μεντελέβιο Md, americium αμερίκιο Am, pion πιόνιο π, proton πρωτόνιο p, κατηγορίες σωματιδίων όπως fermion φερμιόνιο, boson μποζόνιο.

11.1 Για το σωματίδιο χιγγς

Θα πούμε δυο λόγια για το σωματίδιο higgs με σύμβολο H (αν υπάρχουν περισσότερα τέτοια σωματίδια χρησιμοποιείται και το h). Θα εκφράσομε και προσωπικές μας απόψεις για αυτό το θέμα. Το σωματίδιο έχει πάρει το όνομά του από τον επιστήμονα Peter Higgs. Σε αυτή την περίπτωση δεν ακολουθήθηκε (ο σιωπηρός) κανόνας που ακολουθείται για τα στοιχεία, για τα νουκλίδια και τα σωματίδια όπου το όνομα του προσώπου αποτελεί απλώς τη ρίζα για το όνομα που προκύπτει. Αν γίνονταν αυτό, το σωματίδιο θα λέγονταν higgson και στα ελληνικά χιγγσόνιο. Οι περισσότεροι επιστήμονες γράφουν το όνομα του σωματιδίου στη μορφή Higgs, με το πρώτο γράμμα κεφαλαίο. Όμως αυτό είναι όνομα σωματιδίου δεν είναι όνομα φαινομένου και καλό είναι να μην γίνεται εξαίρεση σε σχέση με όλα τα άλλα σωματίδια, επομένως καλό είναι να γράφεται higgs, ελληνικά χιγγς, με το πρώτο γράμμα πεζό. Ας σημειωθεί ότι το όνομα του σωματιδίου δεν περιέχει και άλλη λέξη όπως Joule effect, Lagrange equation κτλ, οπότε όπως είδαμε γράφεται με το πρώτο γράμμα κεφαλαίο.

Νομίζομε ότι για το όνομα αυτού του σωματιδίου πρέπει να πούμε λίγο περισσότερα.

Η ανακάλυψή του από τα πειράματα ATLAS και CMS στο CERN το 2012 οδήγησε στο να δοθεί το Νόμπελ Φυσικής (2013) στους François Englert και Peter Higgs. Συνεργάτης του Englert ήταν ο Robert Brout ο οποίος όταν έγινε η επιλογή για το Νόμπελ είχε πεθάνει. Σίγουρα αν ζούσε το Νόμπελ θα δίνονταν και στους τρεις.

Είναι γεγονός ότι έχει καθιερωθεί μεταξύ των επιστημόνων το όνομα higgs, όμως αξίζει να δούμε την ανακοίνωση της επιτροπής για το Νόμπελ που λέει γιατί δόθηκε στους δυο ανωτέρω επιστήμονες το βραβείο. Η ανακοίνωση λέει “ for the theoretical discovery of the mechanism that contributes to our understanding of the origin of mass of subatomic particles, and which recently was confirmed through the discovery of the predicted fundamental particle, by the ATLAS and CMS experiments at CERN's Large Hadron Collider". Στην ανακοίνωση στους δημοσιογράφους χρησιμοποιείται η έκφραση the so called Higgs particle, δηλαδή κάτι σαν το λεγόμενο σωματίδιο Χιγγς.

Ο ίδιος ο Peter Higgs αισθάνεται κάπως άβολα και αναφέρεται στο σωματίδιο με την παραπάνω φρασεολογία, so called Higgs particle, ή το αποκαλεί scalar boson, βαθμωτό μποζόνιο.

Μερικοί επιστήμονες, όπως και ο Englert, δίνουν στο σωματίδιο και τα τρία ονόματα μαζί αλλά αυτό δεν έχει επικρατήσει. Επομένως, θεωρούμε ότι πρόσθετος λόγος να γράφεται το higgs με πεζό το πρώτο γράμμα του, είναι για να μην θεωρείται ότι είναι σωματίδιο που συνδέεται μόνο με ένα πρόσωπο, τον Peter Higgs. Αν γράφομε απλώς higgs αυτό νοείται ότι είναι το όνομα του σωματιδίου που για ιστορικούς λόγους διατηρεί την συσχέτιση με το όνομα του ενός μόνον από τους τρεις επιστήμονες που αναφέραμε. Η θεωρία στην οποία στηρίζεται η ύπαρξη του σωματιδίου οφείλεται στην ερευνητική δουλειά, κυρίως των ανωτέρω τριών επιστημόνων (όμως υπάρχουν και άλλοι που έχουν σημαντική συμβολή). Αυτό το όνομα επικράτησε από πολύ νωρίς, ίσως διότι ο Peter Higgs πρώτος έκανε αναφορά σε τέτοιο σωματίδιο που προέκυπτε από τη θεωρία και έχει μάζα. Όμως και ο ίδιος αναφέρει ότι η ύπαρξη τέτοιου σωματιδίου σαφώς συμπεραίνεται και από την εργασία των Brout και Englert . Λέγεται ότι πρώτος έκανε χρήση αυτού του ονόματος για το σωματίδιο ο αείμνηστος Ben Lee σε ένα συνέδριο στο Fermilab των ΗΠΑ το 1972. Επίσης φαίνεται να συνέβαλαν στην καθιέρωση αυτού του ονόματος οι νομπελίστες Martinus Veltman και Gerardus t' Hooft και κάπως άθελά του ο νομπελίστας Steven Weinberg. Ενδιαφέροντα είναι όσα έχει αναφέρει σχετικά με αυτό το θέμα ο Frank Close.

Η ανακάλυψη που οδήγησε στο Νόμπελ, είναι η εύρεση του μηχανισμού που, εκτός των άλλων, δίνει μάζα στα θεμελιώδη σωματίδια. Σε αυτόν το μηχανισμό υπεισέρχεται κβαντικό πεδίο το οποίο σχετίζεται με το παραπάνω σωματίδιο. Επαναλαμβάνομε ότι η όλη δουλειά είναι δουλειά πολλών επιστημόνων αλλά κρίθηκε ότι κύρια συμβολή είχαν οι παραπάνω δύο (εν ζωή), το σωστότερο είναι οι παραπάνω τρεις. Έχει επικρατήσει η ορολογία, Higgs mechanism (μηχανισμός Χιγγς), Higgs field (πεδίο Χιγγς). Υπάρχουν επιστήμονες που προτιμούν τον όρο Brout-Englert-Higgs (BEH) mechanism (μερικοί βάζουν και ονόματα των άλλων επιστημόνων) και Brout-Englert-Higgs (BEH) field. Αυτό θεωρούμε ότι είναι το πιο σωστό, εκφράζει καλύτερα την πραγματικότητα των γεγονότων και πρέπει να ακολουθείται από όλους. Η γραφή με κεφαλαίο το πρώτο γράμμα δηλώνει ότι ο επιστήμονας ή οι επιστήμονες είναι αυτοί που ανακάλυψαν το μηχανισμό ή το πεδίο. Αυτό έχει καθιερωθεί στην περίπτωση των Glashow- Iliopoulos-Maiani, με τη χρήση του όρου GIM mechanism. Επειδή είναι μάλλον δύσκολο να αλλάξει τελείως η ορολογία, γι αυτό το λόγο είναι πιο «δίκαιο» η γραφή να είναι τέτοια που να μην υπονοεί μόνον τον επιστήμονα Peter Higgs αλλά το σωματίδιο, που ας δεχτούμε ότι λέγεται higgs. Δηλαδή αν χρησιμοποιείται αυτή η εκδοχή, καλό είναι να γράφεται, higgs mechanism που να σημαίνει μηχανισμός του σωματιδίου χιγγς και higgs field που να εννοεί πεδίο σχετικό με το σωματίδιο χιγγς. Αυτά είναι ανάλογα με τα χρησιμοποιούμενα, electron field, proton field.

Η γνώμη μας είναι ότι, καλύτερα θα ήταν το σωματίδιο να είχε όνομα που να σχετίζεται με την κύρια δουλειά που κάνει στη φύση, η οποία είναι η ύπαρξη μάζας των θεμελιωδών σωματιδίων. Θα μπορούσε να λέγεται, για παράδειγμα, masson (μαζόνιο), ίσως όχι καλόηχο. Ότι και να καθιερωθεί μελλοντικά, σίγουρα το σύμβολο θα μείνει το ίδιο H (h), για πρακτικούς και ιστορικούς λόγους. Για αυτό το λόγο η προσωπική μας επιλογή για το όνομα είναι heavyon (χεβιόνιο, βαρόνιο) που και αυτό σημαίνει ότι δίνει μάζα στα θεμελιώδη σωματίδια και έχει το πλεονέκτημα ότι αρχίζει από h και είναι καλόηχο. Για τα υπόλοιπα, η προσωπική μας γνώμη είναι να χρησιμοποιούνται οι όροι BEH field, BEH mechanism. Τελειώνοντας με αυτό το θέμα, μπορούμε να πούμε ότι η γραφή των ονομάτων των σωματιδίων ακολουθεί τα ονόματα των μονάδων και γράφονται με το αρχικό τους γράμμα πεζό.

12. Στοιχεία διαστατικής ανάλυσης

Με τη διαστατική ανάλυση μπορούμε να βρούμε λύση ενός προβλήματος ή να ανάγομε ένα πρόβλημα σε απλούστερο ακόμη και όταν δεν έχομε θεωρία που να μας λύνει το πρόβλημα.

Θα σχολιάσομε την επιλογή των θεμελιωδών μεγεθών και των αντίστοιχων θεμελιωδών μονάδων τους. Για τον κλάδο της Μηχανικής θεμελιώδη μεγέθη με τις αντίστοιχες μονάδες τους έχουν θεωρηθεί από παλιά η μάζα, M, το μήκος, L, και ο χρόνος, T. Αυτά χαρακτηρίζονται από τις αντίστοιχες διαστάσεις $\mathsf{M,L,T}$. Οι ερωτήσεις που προκύπτουν είναι,

1. Η παραπάνω επιλογή είναι ικανή για την περιγραφή της δομής των μονάδων όλων των φυσικών ποσοτήτων της Μηχανικής;

2. Γιατί επιλέξαμε αυτά τα μεγέθη ως θεμελιώδη;

Σχετικά με το 1, αναφέρομε ότι πράγματι έχει προκύψει εμπειρικά ότι όλη η δομή της Κλασικής Μηχανικής μπορεί να αναπτυχθεί με την παραπάνω επιλογή, ενώ όλα τα άλλα μεγέθη μπορεί να καθοριστούν από τις γνωστές σχέσεις που τα συνδέουν με τα παραπάνω θεμελιώδη. Η παρατήρηση είναι ότι όλες οι ποσότητες που μπορεί να εισαχθούν στα πλαίσια της Μηχανικής μπορεί να συνδεθούν με μαθηματικές σχέσεις με τις ανωτέρω τρεις ποσότητες. Οι διαστάσεις τους (ή η διάστασή τους) μπορεί να εκφραστεί συναρτήσει των $\mathrm{M,L,T}$. Το ίδιο ισχύει για τις μονάδες τους.

Όμως η επιλογή αυτή δεν είναι αναγκαία, μπορεί να επιλεγούν τρεις άλλες ποσότητες ως θεμελιώδεις. Για παράδειγμα μπορεί να επιλεγεί η τριάδα δύναμη, F , μήκος, L , και χρόνος, T . Οι διαστάσεις θα είναι τότε $\mathrm{F,L,T}$. Αν επεκταθούμε και σε άλλες περιοχές της Φυσικής όπως της θερμότητας, του ηλεκτρισμού και του μαγνητισμού, τότε να είναι βολικό να εισαχθούν και άλλα θεμελιώδη φυσικά μεγέθη και αντίστοιχες μονάδες, δηλαδή έχομε εκτεταμένες ομάδες θεμελιωδών μεγεθών. Αυτό δεν είναι γενικώς αναγκαίο διότι μπορεί να γραφτούν σχέσεις που συνδέουν αυτές τις νέες ποσότητες με τις τρεις θεμελιώδεις που αναφέραμε. Όμως υπάρχουν διάφοροι λόγοι που οδηγούν στη χρήση εκτεταμένων ομάδων θεμελιωδών μεγεθών. Μια από τις αιτίες είναι ότι συστήματα μονάδων με λίγες θεμελιώδεις μονάδες είναι στείρα με την έννοια ότι δεν είναι πρόσφορα για τη διαστατική ανάλυση. Επίσης οι διαστατικοί εκθέτες σε συστήματα με λίγα θεμελιώδη μεγέθη μπορεί να μην είναι ακέραιοι πράγμα που δεν είναι καταδικαστέο αλλά προτιμούμε να έχομε ακέραιους διαστατικούς εκθέτες, αυτό μας φαίνεται πιο φυσιολογικό.

Είδαμε ότι στα πλαίσια της Μηχανικής η επιλογή των συγκεκριμένων θεμελιωδών μεγεθών με διαστάσεις $\mathrm{M,L,T}$ είναι εμπειρική, αλλά δεν είναι ούτε αναγκαία ούτε μπορεί να τεκμηριωθεί θεωρητικά. Όμως πρέπει να τονιστεί ότι η επιλογή των τριών θεμελιωδών μεγεθών δε μπορεί να είναι τελείως αυθαίρετη. Για παράδειγμα αν διαλέξομε ως θεμελιώδη μεγέθη το μήκος, L , το χρόνο, T , και την ταχύτητα, V , τότε σε ένα τέτοιο σύστημα δεν θα μπορούσαμε να ορίσομε μεγέθη που περιέχουν μάζα. Πρέπει οι επιλεγόμενες θεμελιώδεις ποσότητες να είναι μεταξύ τους ανεξάρτητες και να μην είναι δυνατόν να εκφραστούν συναρτήσει των άλλων με τους μαθηματικούς τύπους που χαρακτηρίζουν το σύστημα των φυσικών μεγεθών. Ας εξετάσομε την περίπτωση των τριών θεμελιωδών μεγεθών. Έστω ότι τα νέα θεμελιώδη μεγέθη είναι τα P,Q,R με διαστάσεις αντιστοίχως $\mathrm{P,Q,R}$. Έστω ότι συνδέονται με τα (ανεξάρτητα) θεμελιώδη μεγέθη $\mathrm{M,L,T}$ με τις σχέσεις διαστάσεων

$$\mathrm{P} = \mathrm{M}^{a}\mathrm{L}^{b}\mathrm{T}^{c}$$
$$\mathrm{Q} = \mathrm{M}^{d}\mathrm{L}^{e}\mathrm{T}^{f}$$
$$\mathrm{R} = \mathrm{M}^{g}\mathrm{L}^{h}\mathrm{T}^{i}$$

Οι εκθέτες είναι οι διαστατικοί εκθέτες. Με λιγότερη προσκόλληση στον αυστηρό συμβολισμό μπορούμε να γράψομε

$$P = M^a L^b T^c \qquad\qquad [P] = [M^a L^b T^c]$$
$$Q = M^d L^e T^f \quad \text{ή για τις αντίστοιχες μονάδες τους} \quad [Q] = [M^d L^e T^f]$$
$$R = M^g L^h T^i \qquad\qquad [R] = [M^g L^h T^i]$$

Μπορούμε ακόμη να γράψομε τις παραπάνω σχέσεις με τα αντίστοιχα πεζά γράμματα p,q,r

$$[p] = [m^a l^b t^c],\ [q] = [m^d l^e t^f],\ [r] = [m^g l^h t^i]$$

ή απλώς $\quad p = m^a l^b t^c,\ q = m^d l^e t^f,\ r = m^g l^h t^i$

Οι σχέσεις γράφονται με διάφορους τρόπους στη διεθνή βιβλιογραφία, αρκεί να είναι σαφές το περιεχόμενό τους. Μπορεί να δειχτεί με επιχειρηματολογία της Άλγεβρας, ότι για να είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους τα νέα μεγέθη P,Q,R ή p,q,r πρέπει να ισχύει για την παρακάτω ορίζουσα των διαστατικών εκθετών η σχέση

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \neq 0$$

Αν η ορίζουσα είναι μηδέν τότε τα νέα μεγέθη δε μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως θεμελιώδη διότι συνδέονται με κάποιες σχέσεις μεταξύ τους. Με άλλα λόγια δε μπορούν τα παλιά μεγέθη να εκφραστούν συναρτήσει των νέων, δηλαδή οι παραπάνω σχέσεις δεν αντιστρέφονται. Στην περίπτωση που τα τρία μεγέθη είναι το μήκος (L), ο χρόνος (T) και η ταχύτητα (V) τότε

$$\mathsf{L} = \mathsf{M}^0 \mathsf{L}^1 \mathsf{T}^0$$
$$\mathsf{T} = \mathsf{M}^0 \mathsf{L}^0 \mathsf{T}^1$$
$$\mathsf{V} = \mathsf{M}^0 \mathsf{L}^1 \mathsf{T}^{-1}$$

Άρα $\quad a = 0, b = 1, c = 0, d = 0, e = 0, f = 1, g = 0, h = 1, i = -1$.

Οπότε η ορίζουσα

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

Επομένως αυτές οι ποσότητες δεν είναι ανεξάρτητες. Αυτό είναι προφανές από το γεγονός ότι υπάρχει η εξάρτηση: ταχύτητα ίσον μήκος δια χρόνου, $\upsilon = l/t$.

Μπορούμε να πούμε ότι η επιλογή του συνόλου των θεμελιωδών μεγεθών πρέπει να είναι τέτοια που

Α) κανένα μέλος του συνόλου δε μπορεί να παραχθεί από άλλο ή άλλα μέλη του συνόλου αυτού και

Β) κάθε ποσότητα που δεν ανήκει στο σύνολο αυτό μπορεί να παραχθεί από αυτό το σύνολο.

Τότε αυτό το σύνολο λέγεται πλήρες σύνολο φυσικών μεγεθών.

Οι σχέσεις που υπάρχουν μεταξύ φυσικών μεγεθών είναι (διαστατικά) ομοιογενείς (ή ομογενείς). Αυτό σημαίνει ότι όταν περιέχονται αθροίσματα ή διαφορές διαφόρων όρων

πρέπει οι όροι να έχουν τις ίδιες διαστάσεις. Επίσης αν έχομε μια εξίσωση μεταξύ εκφράσεων που περιέχουν διάφορες φυσικές ποσότητες πρέπει το πρώτο και το δεύτερο μέλος να έχουν τις ίδιες διαστάσεις. Αυτή είναι η αρχή της (διαστατικής) ομοιογένειας ή ομογένειας. Σε αυτή τη αρχή βασίζεται σε γενικές γραμμές η διαστατική ανάλυση.

Αν μετά από διάφορους υπολογισμούς καταλήξομε σε μια σχέση μεταξύ φυσικών μεγεθών και βρούμε ότι η σχέση δεν είναι ομογενής με την ανωτέρω έννοια, τότε σίγουρα είναι λάθος σχέση. Αντιστρόφως, αν είναι (διαστατικά) ομογενής δεν θα πει ότι είναι και σωστή. Μπορεί να κατανοήσει κάποιος γιατί στην περίπτωση της εκθετικής συνάρτησης πρέπει το όρισμα να είναι αδιάστατο δηλαδή (καθαρός) αριθμός. Έχομε

$\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots$ Αν το x δεν είναι αδιάστατο δε μπορούμε να προσθέσομε τους όρους της σειράς γιατί έχουν διαφορετικές διαστάσεις. Ανάλογα ισχύουν και για διάφορες άλλες συγκεκριμένες (ειδικές) μαθηματικές συναρτήσεις.

Στη διαστατική ανάλυση έχομε να απαντήσομε στο πρόβλημα που ακολουθεί.

Σε συγκεκριμένο φαινόμενο, πως εξαρτάται η τιμή μιας ποσότητας από τις τιμές άλλων ποσοτήτων οι οποίες την επηρεάζουν; Δηλαδή πρέπει να βρούμε μια σχέση της μορφής

$Q_1 = \phi(Q_2, Q_3, Q_4, \ldots)$. Η συνάρτηση ϕ μπορεί να έχει οποιαδήποτε μορφή. Όμως υπάρχει μια θεμελιώδες πρόταση στα μαθηματικά, το Θεώρημα Προσέγγισης (Approximation Theorem) του Weierstrass, που λέει ότι οποιαδήποτε συνεχής συνάρτηση μπορεί να προσεγγιστεί με όση ακρίβεια θέλομε με μια σειρά από προσθετέους ο καθένας εκ των οποίων είναι γινόμενο ενός (αδιάστατου) αριθμού επί ένα γινόμενο δυνάμεων των ποσοτήτων που επηρεάζουν την ποσότητα Q_1. Για παράδειγμα, αν έχομε εξάρτηση από τρία μεγέθη τότε

$$Q_1 = \phi(Q_2, Q_3, Q_4) = k_1 Q_2^{a_1} Q_3^{b_1} Q_4^{c_1} + k_2 Q_2^{a_2} Q_3^{b_2} Q_4^{c_2} + k_3 Q_2^{a_3} Q_3^{b_3} Q_4^{c_3} + ...$$

Σύμφωνα με την αρχή της ομογένειας όλοι οι όροι πρέπει να έχουν τις ίδιες διαστάσεις, συμπεριλαμβανομένου του Q_1. Έτσι μπορούμε να γράψομε για τις μονάδες το γενικό όρο $[Q_1] = \left[Q_2^a Q_3^b Q_4^c ...\right]$. Το πρόβλημα είναι να βρούμε από ποια μεγέθη εξαρτάται το Q_1. Δηλαδή ποιες ποσότητες σχετίζονται με το πρόβλημά μας. Σε αυτό το σημείο μπορεί να γίνουν σημαντικά λάθη και τότε η μέθοδος δίνει λάθος αποτέλεσμα.

Δεν πρέπει να αγνοηθεί καμιά ποσότητα που μπορεί να επηρεάσει το αποτέλεσμα ακόμη και αν στη συγκεκριμένη περίπτωση που εξετάζομε έχει σταθερή τιμή. Επίσης πρέπει να χρησιμοποιηθούν οι σταθερές που έχουν διάσταση, π.χ. η σταθερά της παγκόσμιας έλξης, G. Από την άλλη πλευρά δεν βοηθά σε τίποτα να εισάγονται μεγέθη που δεν έχουν σχέση με το πρόβλημα που εξετάζομε. Για παράδειγμα, σε πρόβλημα που σχετίζεται με ισορροπία ρευστού δεν χρειάζεται να εισαχθεί το ιξώδες το οποίο είναι μέγεθος που σχετίζεται με κίνηση. Επίσης δε χρειάζονται μεγέθη που έχουν έμμεση σχέση με το πρόβλημα. Για παράδειγμα, η θερμοκρασία μπορεί να επηρεάζει την πυκνότητα ή την (ηλεκτρική) αντίσταση όταν αυτά τα μεγέθη εισέρχονται άμεσα στο πρόβλημα, οπότε δε χρειάζεται να ληφθεί υπόψη η θερμοκρασία. Σε άλλες περιπτώσεις που υπάρχει ροή θερμότητας η θερμοκρασία είναι απαραίτητη.

Το ελληνικό βιβλίο [15] της βιβλιογραφίας μας, περιέχει ένα μεγάλο πλήθος παραδειγμάτων όπου γίνεται χρήση της διαστατικής ανάλυσης για λύση προβλημάτων που καλύπτουν όλα τα πεδία της επιστήμης από την κλασική ως την ποιο σύγχρονη. Πολλά παραδείγματα διαστατικής ανάλυσης έχει και το ελληνικό βιβλίο [16].

12.1 Μέθοδος Rayleigh

Η μέθοδος Rayleigh είναι η μεθοδολογία που μπορεί να χρησιμοποιηθεί ευκολότερα από όλους τους ενδιαφερόμενους. Θα ασχοληθούμε με ένα απλό πρόβλημα της Μηχανικής, το πρόβλημα του απλού εκκρεμούς του οποίου ξέρομε τη λύση. Συγκεκριμένα αναφερόμαστε στη σχέση της περιόδου του εκκρεμούς συναρτήσει διαφόρων χαρακτηριστικών του εκκρεμούς. Εικάζομε ότι τα μεγέθη που επηρεάζουν την περίοδο του εκκρεμούς, που ως φυσικό μέγεθος παριστάνεται με το σύμβολο του χρόνου t, είναι το μήκος του l, η μάζα του m, η ένταση του πεδίου βαρύτητας g και το πλάτος αιώρησής του, δηλαδή η γωνία φ (σε μονάδες του SI, ακτίνια). Επομένως ψάχνομε για τη σχέση $t = \phi(l, m, g, \varphi)$. Το t είναι η εξαρτημένη μεταβλητή ενώ τα άλλα μεγέθη είναι οι ανεξάρτητες μεταβλητές, με την έννοια ότι η μεταβολή της κάθε μιας από αυτές δεν επηρεάζει τις άλλες, όσον αφορά στο συγκεκριμένο πρόβλημα και τη σχέση που γράψαμε για το εκκρεμές. Επομένως σύμφωνα με όσα έχομε πει ο καθένας όρος από το άθροισμα που σχετίζεται με το ανάπτυγμα της παραπάνω σχέσης οδηγεί στην έκφραση για τις μονάδες $[t]=[l^a m^b g^c \varphi^d]$.

Για τις διαστάσεις έχομε την αντίστοιχη σχέση $\mathrm{T}^1 = \mathrm{L}^a \mathrm{M}^b \left(\mathrm{L}\mathrm{T}^{-2}\right)^c 1^d$.

Η διαστατική ομογένεια οδηγεί τελικώς στις τιμές $c=-1/2, a=1/2, b=0$. Ο εκθέτης d που σχετίζεται με το αδιάστατο μέγεθος που είναι η γωνία φ, δε μπορεί να προσδιοριστεί από τη διαστατική ανάλυση. Με όσα έχομε πει, καταλήγομε στο ότι η περίοδος μπορεί να γραφτεί ως ένα άθροισμα όρων δηλαδή στη μορφή

$t=\left(\frac{l}{g}\right)^{1/2} \sum_n k_n \varphi^{d_n}$. Κάνομε χρήση αντίστροφα, του θεμελιώδους μαθηματικού αξιώματος που αναφέραμε, οπότε το άθροισμα μπορεί να γραφτεί ως (άγνωστη) αδιάστατη συνάρτηση $\phi_1(\varphi)$, οπότε τελικώς καταλήγομε στη σχέση για την περίοδο

$$t=\left(\frac{l}{g}\right)^{1/2} \phi_1(\varphi).$$

Για ευνόητους λόγους δε χρησιμοποιούμε το σύνηθες σύμβολο για την περίοδο. Παρατηρούμε ότι δεν υπάρχει εξάρτηση από τη μάζα, βρήκαμε τη σωστή εξάρτηση από το μήκος και την ένταση της βαρύτητας, όπως δίνει και η αναλυτική λύση, αλλά με τη διαστατική ανάλυση δε μπορούμε να προσδιορίσομε την τιμή της αδιάστατης πολλαπλασιαστικής σταθεράς. Η αναλυτική λύση του προβλήματος οδηγεί στο ότι για μεγάλου πλάτους αιωρήσεις η τιμή της σταθεράς ϕ_1 έχει πολύπλοκη εξάρτηση από τη γωνία εκτροπής, ενώ για σχετικά μικρές τιμές αυτής της γωνίας ισχύει $\phi_1 = 2\pi$, δηλαδή για μικρού πλάτους αιωρήσεις η περίοδος είναι ανεξάρτητη της γωνίας εκτροπής.

Μπορεί κάποιος να αντιμετωπίσει το πιο απλό πρόβλημα του εκκρεμούς με μικρού πλάτους αιωρήσεις, οπότε δε με συμπεριλαβάνεται στα ανεξάρτητα μεγέθη η γωνία εκτροπής. Σε αυτή την περίπτωση υπάρχει μόνο ένας όρος του αθροίσματος. Αυτό οδηγεί εύκολα στο ότι $t=K\left(\frac{l}{g}\right)^{1/2}$, όπου K είναι απροσδιόριστη αδιάστατη σταθερά. Αυτή η περίπτωση εξετάζεται ακόμη και σε ξενόγλωσσα βιβλία Φυσικής μέσης εκπαίδευσης.

12.2 Μέθοδος Buckingham ή Γενική Μέθοδος

Στη μέθοδο Buckingham γίνεται χρήση του Θεωρήματος Π (πι, the Pi Theorem, ή Buckingham Pi Theorem, το Θεώρημα Π του Buckingham). Το κεφαλαίο Ελληνικό γράμμα, Π, είναι το διεθνές σύμβολο παράστασης γινομένου, $\prod_{i=1}^{n} a_i = a_1 a_2 \cdots a_n$, οπότε επειδή εδώ υπεισέρχονται γινόμενα γι αυτό και ο όρος Θεώρημα Π (πι).

Τονίζομε ότι αυτή η δεύτερη μέθοδος δεν επεκτείνει τη διαστατική ανάλυση σε προβλήματα που δε μπορεί να αντιμετωπίσει η μέθοδος Rayleigh, όμως αποτελεί τη βάση μιας λογικής διαδικασίας ανάλυσης και δίνει τη δυνατότητα ώστε τα αποτελέσματα μιας διερεύνησης να παρουσιαστούν στην πιο γενική μορφή.

Την παρουσιάζομε και για λόγους πληρότητας. Η αυστηρή απόδειξη του θεωρήματος γίνεται με τη χρήση της θεωρίας συστημάτων γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων και μπορεί να βρεθεί στη βιβλιογραφία που παραθέτομε.

Υπάρχει μια πλήρης αλγεβρική θεωρία της διαστατικής ανάλυσης που δεν θα παρουσιάσομε σε λεπτομέρειες. Θα αναφερθούμε μόνο σε κάποια συμπεράσματά της.

Τονίζομε για παράδειγμα, αυτό που αναφέραμε και στα προηγούμενα, ότι μια εξίσωση που είναι διαστατικά ομογενής έχει τέτοια μορφή η οποία δεν εξαρτάται από το ποιες έχουν ληφθεί ως θεμελιώδεις μονάδες.

Ένα παράδειγμα είναι η σχέση για το απλό εκκρεμές με μικρού πλάτους αιωρήσεις, $t = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$. Αν χρησιμοποιήσομε τις συνήθεις θεμελιώδεις μονάδες του SI έχομε $l = 1\text{ m}, g = 10\text{ m s}^{-2}$ και βρίσκομε $t = 1{,}99\text{ s}$. Αν υποθέσομε ότι οι θεμελιώδεις μονάδες για το μήκος και το χρόνο είναι αντιστοίχως το χιλιόμετρο, km και η ώρα, h. Τότε $l = 1\text{m} = 10^{-3}\text{ km}, g = 10\text{m s}^{-2} = 3{,}6^2 \times 10^4\text{ km h}^{-2}$. Εφαρμόζομε την ίδια σχέση οπότε έχομε

$t = 2\pi\sqrt{\frac{10^{-3}}{3{,}6^2 \times 10^4}}\text{ h} = 5{,}5192 \times 10^{-4}\text{ h}$. Αυτό είναι και πάλι η σωστή περίοδος διότι με τη μετατροπή σε δευτερόλεπτα ξαναβρίσκομε $t = 1{,}99\text{ s}$.

Για το Θεωρήματο Π χρειάζεται να αναφέρομε τα παρακάτω.

Ένα αδιάστατο γινόμενο μεγεθών είναι γινόμενο που αποτελείται από τα μεγέθη γενικώς υψωμένα σε θετικές ή αρνητικές δυνάμεις, έτσι που το γινόμενο να είναι αδιάστατο, καθαρός αριθμός.

Από n μεγέθη μπορεί να φτιαχτεί ένα μεγάλο πλήθος αδιάστατων γινομένων. Ένα σύνολο αδιάστατων μεγεθών είναι πλήρες, αν τα μέλη του είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους και κάθε άλλο αδιάστατο γινόμενο μπορεί να εκφραστεί συναρτήσει των μελών του πλήρους συνόλου.

Η διατύπωση του Θεωρήματος Π είναι:

Μια διαστατικά ομογενής εξίσωση που συνδέει n ποσότητες (μεγέθη), μπορεί να αναχθεί σε μια σχέση μεταξύ των μελών ενός πλήρους συνόλου αδιάστατων γινομένων.

Το πρόβλημα είναι να προσδιοριστεί το πλήθος των αδιάστατων γινομένων ενός τέτοιου πλήρους συνόλου και να βρεθούν αυτά τα γινόμενα.

Στην αρχή ο Buckingham και άλλοι συγγραφείς θεωρούσαν ότι το πλήθος των αδιάστατων γινομένων είναι $n-r$, όπου $r \le n$ είναι τα μεγέθη αναφοράς, δηλαδή τα r θεμελιώδη μεγέθη που εισέρχονται στο κάθε ένα συγκεκριμένο πρόβλημα. Σε αυτή την περίπτωση η ομογενής εξίσωση μπορεί να αναχθεί σε μια σχέση μεταξύ $(n-r)$ ανεξάρτητων αδιάστατων γινομένων.

Αυτό ισχύει συχνά αλλά δεν ισχύει πάντοτε διότι ακόμη και αν τα θεμελιώδη μεγέθη ενός συστήματος μονάδων είναι δεδομένο, το πλήθος r εξαρτάται από το ποια μεγέθη θεωρούνται ως θεμελιώδη.

Ο σωστός κανόνας εύρεσης του πλήθους των αδιάστατων γινομένων που αποτελούν ένα πλήρες σύνολο είναι ο εξής:

Ο αριθμός των αδιάστατων γινομένων που αποτελούν πλήρες σύνολο είναι ίσος με τον ολικό αριθμό των μεταβλητών, n, μείον το μέγιστο αριθμό εκείνων των μεταβλητών οι οποίες δεν σχηματίζουν αδιάστατα γινόμενα.

Στη διαστατική ανάλυση χρήσιμη είναι η εισαγωγή της διαστατικής μήτρας (ή μήτρας διαστάσεων), λέγεται και διαστατικός πίνακας. Για πράδειγμα, έστω ότι οι μεταβλητές ενός προβλήματος είναι η ταχύτητα υ, το μήκος l, η δύναμη F, η πυκνότητα (μάζας) ρ, το ιξώδες η, και η επιτάχυνση της βαρύτητας g. Τα θεμελιώδη μεγέθη που υπεισέρχονται είναι τα M, L, T. Σχηματίζομε την παρακάτω διαστατική μήτρα που τα στοιχεία της είναι οι διαστατικοί εκθέτες, π.χ. οι διαστατικοί εκθέτες για το g, αφού $g \to M^0 L^1 T^{-2}$, είναι 0,1,-2.

Διαστατική μήτρα

$$\begin{array}{ccccccc} & \upsilon & l & F & \rho & \eta & g \\ M & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ L & 1 & 1 & 1 & -3 & -1 & 1 \\ T & -1 & 0 & -2 & 0 & -1 & -2 \end{array}$$

Από αυτή τη μη τετραγωνική μήτρα μπορούμε να φτιάξομε διάφορες τετραγωνικές μήτρες (δηλαδή μήτρες που έχουν ίσο αριθμό στηλών και γραμμών), διαγράφοντας γραμμές ή και στήλες. Οι ορίζουσες αυτών των τετραγωνικών μητρών λέγονται ορίζουσες της αρχικής μήτρας.

Αν μια μήτρα περιέχει μια μη μηδενική ορίζουσα τάξης r και αν όλες οι ορίζουσες τάξης μεγαλύτερης του r έχουν τιμή μηδέν, τότε λέμε ότι η τάξη της μήτρας είναι r.

Στην τελευταία περίπτωση οι τετραγωνικές μήτρες που φτιάχνονται έχουν μέγιστη τάξη 3. Εφόσον υπάρχει μήτρα 3×3 που είναι μη μηδενική, συμπεραίνομε ότι η τάξη της παραπάνω διαστατικής μήτρας είναι 3. Τέτοια μη μηδενική μήτρα είναι αυτή που σχηματίζεται από τις τρεις τελευταίες στήλες, δηλαδή έχομε

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$$

Ισχύει το παρακάτω θεώρημα για τη διαστατική ανάλυση.

Το πλήθος των αδιάστατων γινομένων ενός πλήρους συνόλου τέτοιων γινομένων ισούται με τον συνολικό αριθμό μεταβλητών n, μείον την τάξη r, της διαστατικής μήτρας.

Αυτό το θεώρημα προέρχεται από τη θεωρία περί αλγεβρικών εξισώσεων. Σχετίζεται με το πλήθος των ανεξάρτητων λύσεων ενός συστήματος (ανεξάρτητων) αλγεβρικών εξισώσεων όπου υπάρχουν περισσότεροι άγνωστοι από το πλήθος των εξισώσεων.

Τονίζομε ξανά ότι τα παραπάνω $(n-r)$ αδιάστατα γινόμενα αποτελούν μια πλήρη ομάδα (ένα πλήρες σύνολο) από αδιάστατα γινόμενα που σχηματίζονται από το σύνολο των n μεγεθών, με την έννοια που αναφέραμε και στα προηγούμενα, δηλαδή το σύνολο είναι πλήρες αν κανένα μέλος του δεν εκφράζεται από άλλα μέλη αυτού του συνόλου ενώ όλα τα άλλα αδιάστατα γινόμενα που σχηματίζονται από τις n ποσότητες, μπορούν να εκφραστούν συναρτήσει των μελών του πλήρους συνόλου.

Στην παραπάνω περίπτωση $n=6$ $r=3$ επομένως το πλήθος των αδιάστατων γινομένων είναι $n-r=6-3=3$. Σε αυτή την περίπτωση βρίσκομε το σωστό αποτέλεσμα αν αφαιρέσομε από το $n=6$ το πλήθος των θεμελιωδών μεγεθών (M,L,T) που είναι επίσης 3. Αυτό όπως είπαμε προηγουμένως ισχύει σε πολλές περιπτώσεις.

Οποιαδήποτε εξίσωση μεταξύ n φυσικών μεγεθών μπορεί να γραφτεί στην παρακάτω μορφή.

$$\phi_1(Q_1, Q_2, ..., Q_n) = 0 .$$

Το θεμελιώδες θεώρημα μας λέει ότι, αν r είναι η τάξη της διαστατικής μήτρας , τότε η ανωτέρω σχέση μπορεί να γραφτεί ως εξίσωση που εξαρτάται από $n-r$ αδιάστατα γινόμενα $\Pi_1, \Pi_2, ..., \Pi_{n-r}$, δηλαδή καταλήγομε σε σχέση της μορφής

$$\phi(\Pi_1, \Pi_2, ..., \Pi_{n-r}) = 0 .$$

Ένα προτέρημα της μεθόδου είναι το γεγονός ότι οι μεταβλητές γενικώς έχουν μειωθεί από n σε $n-r$. Αυτό είναι ευνοϊκό για τον ερευνητή διότι μειώνει το πλήθος των μεταβλητών που επηρεάζουν το φαινόμενο τις οποίες πρέπει να εξετάσει.

Στη συνέχεια θα ασχοληθούμε με το συστηματικό υπολογισμό αδιάστατων γινομένων.

Μια μέθοδος που μπορεί να εφαρμόσει κάποιος σε μερικές περιπτώσεις, είναι να εξετάσει το πρόβλημα λίγο πολύ εμπειρικά και με μια ματιά να καταλήξει στα ανεξάρτητα αδιάστατα γινόμενα και να λύσει το πρόβλημα μέχρι το σημείο που γίνεται με τη διαστατική ανάλυση.

Θα περιγράψομε την ακόλουθη πιο συστηματική μέθοδο με ένα παράδειγμα θεωρώντας ευνόητο πως μπορεί κάποιος να κατανοήσει τι γίνεται και σε άλλες περιπτώσεις.

Θα εξετάσομε την περίπτωση μελέτης κυμάτων που διαδίδονται στην επιφάνεια υγρού με μικρό βάθος σε σχέση με το μήκος κύματος. Το υγρό βρίσκεται μέσα σε πεδίο βαρύτητας και η επιφανειακή τάση θεωρείται ότι δεν παίζει ρόλο. Αυτά λέγονται και κύματα βαρύτητας νερού μικρού βάθους.

Οι φυσικές ποσότητες που θεωρούμε ότι υπεισέρχονται στο πρόβλημα είναι οι παρακάτω πέντε.

Μήκος κύματος, λ, ταχύτητα κύματος, υ, επιτάχυνση (ένταση) της βαρύτητας, g, η πυκνότητα του υγρού, ρ και το βάθος του υγρού, d. Τα θεμελιώδη μεγέθη από τα οποία εξαρτώνται αυτά τα πέντε μεγέθη είναι τρία, η μάζα, M, το μήκος, L και ο χρόνος, T. Αυτά είναι σύμφωνα με το SI αλλά και με άλλα συστήματα μεγεθών και μονάδων που χρησιμοποιούνται πολύ λιγότερο σήμερα.

Παριστάνομε με x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 τις δυνάμεις (διαστατικοί εκθέτες) στις οποίες σε κάθε ένα αδιάστατο γινόμενο πρέπει να είναι υψωμένα τα μεγέθη $\lambda, \upsilon, g, \rho, d$ αντιστοίχως. Ο παρακάτω Πίνακας 22 συνοψίζει την περίπτωση.

Έχομε ότι $\lambda \to M^0 L^1 T^0$, $\upsilon \to M^0 L^1 T^{-1}$, $g \to M^0 L^1 T^{-2}$, $\rho \to M^1 L^{-3} T^0$, $d \to M^0 L^1 T^0$.

Επομένως ισχύει για το γενικό αδιάστατο γινόμενο των $\lambda, \upsilon, g, \rho, d$

$$\lambda^{x_1} \upsilon^{x_2} g^{x_3} \rho^{x_4} d^{x_5} = \left(M^0 L^1 T^0\right)^{x_1} \left(M^0 L^1 T^{-1}\right)^{x_2} \left(M^0 L^1 T^{-2}\right)^{x_3} \left(M^1 L^{-3} T^0\right)^{x_4} \left(M^0 L^1 T^0\right)^{x_5}$$
$$= M^{x_4} L^{x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 + x_5} T^{-x_2 - 2x_3}$$

Από αυτή τη σχέση σχηματίζομε τον Πίνακα 22.

Τα μηδενικά στοιχεία δεν σημειώνονται στον πίνακα.

Πίνακας 22

	M	L	T
λ		x_1	
υ		x_2	$-x_2$
g		x_3	$-2x_3$
ρ	x_4	$-3x_4$	
d		x_5	

Είναι ευνόητο ότι σε κάθε ένα αδιάστατο γινόμενο των πέντε μεγεθών πρέπει οι εκθέτες του καθενός χωριστά από τα θεμελιώδη μεγέθη M, L, T να ισούται με μηδέν, δηλαδή το άθροισμα της κάθε μιας στήλης χωριστά πρέπει να είναι μηδέν. Αυτό οδηγεί στις σχέσεις

$$x_4 = 0$$
$$x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 + x_5 = 0$$
$$-x_2 - 2x_3 = 0$$

Μπορούμε να διαπιστώσομε ότι $r = 3$, άρα αφού $n - r = 5 - 3 = 2$, περιμένομε δυο αδιάστατα γινόμενα Π_1, Π_2 (παριστάνονται και με π_1, π_2).

Είμαστε ελεύθεροι να διαλέξομε για δυο από τα x, έστω τα x_1, x_2 δυο ζευγάρια αυθαίρετων τιμών και στη συνέχεια να προσδιορίσομε τα υπόλοιπα. Διαλέγομε τα παρακάτω ζευγάρια.

1. $x_1 = 1 \quad x_2 = -2$

2. $x_1 = -1 \quad x_2 = 0$

Αντικαθιστώντας στο παραπάνω αλγεβρικό σύστημα βρίσκομε τις τιμές των x_3, x_4, x_5 και σχηματίζομε τον Πίνακα 23.

Πίνακας 23

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
π_1	1	-2	1	0	0
π_2	-1	0	0	0	1

Αυτά οδηγούν σε δυο αδιάστατα γινόμενα τα

$\pi_1 = \left(g\lambda/\upsilon^2\right)$ και $\pi_2 = \left(d/\lambda\right)$.

Η μορφή των γινομένων εξαρτάται από την επιλογή των x_1, x_2 όμως το τελικό αποτέλεσμα μπορεί εύκολα να διαπιστώσει κάποιος ότι δεν εξαρτάται από αυτή την επιλογή. Τα αδιάστατα γινόμενα που βρίσκομε με κάθε μια επιλογή είναι όλα ζευγάρια που αποτελούν πλήρη σύνολα. Αυτό σημαίνει ότι μπορεί να εκφράσει κάποιος οποιοδήποτε ζευγάρι συναρτήσει οποιουδήποτε άλλου ζευγαριού. Δηλαδή μπορούμε να βρούμε άλλα αδιάστατα γινόμενα, που να αποτελούν πλήρες σύνολο και να είναι συναρτήσεις των αρχικών, δηλαδή $\Pi_1 = \Pi_1(\pi_1, \pi_2)$, $\Pi_2 = \Pi_2(\pi_1, \pi_2)$.

Πρέπει βέβαια να προσέξει κανείς ώστε τα ζευγάρια των αρχικών τιμών που διαλέγομε για τα x_1, x_2 πρέπει να είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους. Δε μπορεί , π.χ. το ένα ζευγάρι να είναι πολλαπλάσιο του άλλου. Αν αυτό δεν συμβαίνει τότε το σύνολο των αδιάστατων γινομένων δεν θα είναι πλήρες.

Από τα ανωτέρω καταλήγομε στη σχέση $\phi(\pi_1,\pi_2) = \phi(g\lambda/\upsilon^2, d/\lambda) = 0$.

Μπορούμε να γράψομε αυτή τη σχέση (λύνοντας ουσιαστικά ως προς π_1) στη μορφή $g\,\lambda/\upsilon^2 = \phi_1(d/\lambda)$. Σε αυτή την περίπτωση δε μπορέσαμε να προχωρήσομε στη λύση

του προβλήματος όσο μπορέσαμε στην περίπτωση του εκκρεμούς. Στην περίπτωση του εκκρεμούς το μόνο που δεν μπορέσαμε να βρούμε ήταν την εξάρτηση του παράγοντα που εξαρτάται μόνο από το αδιάστατο μέγεθος, τη γωνία (πλάτος) αιώρησης.

Στο παράδειγμα που εξετάσαμε βρήκαμε ότι το φαινόμενο εξαρτάται από δυο (αδιάστατους) συνδυασμούς των φυσικών μεγεθών που υπεισέρχονται, αυτό απλοποιεί τα πράγματα όπως έχομε αναφέρει προηγουμένως. Προφανώς μπορούμε να πάρομε το κάθε αδιάστατο γινόμενο σε κάποια δύναμη κτλ

13. Το μέλλον: Ένα πιο θεμελιώδες Διεθνές Σύστημα Μονάδων

Από αρκετά χρόνια πριν, αλλά κυρίως από το 2000 περίπου και μετά, συζητιέται ο καθορισμός των μονάδων μέτρησης με βάση διάφορες παγκόσμιες σταθερές. Αυτό θα οδηγήσει στο λεγόμενο Νέο SI (New SI). Η τεχνολογία έχει προχωρήσει πάρα πολύ έτσι που οι τιμές τέτοιων σταθερών να είναι γνωστές με ικανοποιητικό πλήθος σημαντικών ψηφίων. Επίσης υπάρχουν διαδικασίες και διατάξεις μετρήσεων που μπορεί να χρησιμοποιηθούν σε διάφορα μέρη της Γης (αλλά και οπουδήποτε εκτός Γης), με τις οποίες επιτυγχάνεται με μεγάλη ακρίβεια η σύγκριση των τιμών των διαφόρων μεγεθών με τις τιμές των ανωτέρω παγκόσμιων σταθερών. Ένα παράδειγμα τέτοιας παγκόσμιας σταθεράς που χρησιμοποιείται και τώρα, πριν από την εισαγωγή του νέου SI, είναι η ταχύτητα του φωτός στο κενό που η τιμή της λαμβάνεται ως ακριβώς γνωστή (δεδομένη) με εννέα σημαντικά ψηφία, 299 792 458 μέτρα το (ή ανά) δευτερόλεπτο.

Το παρόν SI βασίζεται σε επτά θεμελιώδεις μονάδες που είδαμε στα προηγούμενα οι οποίες αντιστοιχούν σε αντίστοιχα θεμελιώδη μεγέθη.

Έχει προταθεί από καιρό να ορισθούν οι θεμελιώδεις αυτές μονάδες που είναι το μέτρο, το χιλιόγραμμο, το δευτερόλεπτο, το αμπέρ , το κέλβιν και το μολ (γραμμομόριο) έτσι που να συνδέονται με θεμελιώδεις φυσικές σταθερές οι οποίες λαμβάνονται να έχουν τιμές ακριβώς γνωστές. Ήδη χρησιμοποιούνται τέτοιες σταθερές στο υπάρχον SI.

Στο νέο SI προτείνεται να ληφθούν ως θεμελιώδεις φυσικές σταθερές οι εξής, η συχνότητα από τη γνωστή μετάπτωση του καισίου 133 δηλαδή η ν_{Cs} (γράφεται συνήθως στη μορφή $\Delta\nu\left({}^{133}\mathrm{Cs}\right)_{\mathrm{hfs}}$ όπου ο δείκτης hfs σημαίνει hyperfine splitting frequency) , η ταχύτητα του φωτός στο κενό c, η σταθερά Planck h, το στοιχειώδες ηλεκτρικό φορτίο e, η σταθερά Boltzmann k και η σταθερά Avogadro N_{A}. Αυτό σημαίνει ότι οι επτά θεμελιώδεις μονάδες του παρόντος SI θα ορίζονται ως προς πραγματικά αναλλοίωτες σταθερές της φύσης. Επίσης άλλες φυσικές σταθερές που συνδέονται με τις παραπάνω, θα έχουν τιμές ακριβώς ή τιμές με μικρότερες ανακρίβειες.

Πάντοτε η ιδέα της μονάδας σχετίζονταν με την ύπαρξη κάποιου αναλλοίωτου της φύσης. Για παράδειγμα το μέτρο ορίστηκε από το μήκος του μεσημβρινού της Γης, το δευτερόλεπτο από το χρόνο περιστροφής της κτλ. Φυσικά αυτά δεν είναι απόλυτα αναλλοίωτα, τουλάχιστο με επαρκή ακρίβεια όπως απαιτείται κυρίως σήμερα αλλά και σε παλιότερες εποχές.

Διάφορα πραγματικά αναλλοίωτα υπάρχουν στην περιοχή της ατομικής φυσικής και όχι μόνο, όπως είναι αυτά που προαναφέραμε.

Με τον όρο αναλλοιώτητα εννοούμε αναλλοιώτητα ως προς μετατόπιση στο χρόνο και στο χώρο. Αυτό σημαίνει ότι στα πλαίσια της Γενικής Σχετικότητας οι μονάδες ορίζονται ως ιδιομονάδες, κύριες μονάδες (proper units), δηλαδή καθορίζονται με τοπικά πειράματα (ως προς συστήματα αναφοράς σε ελεύθερη πτώση σε πεδίο βαρύτητας) όπου τα μόνα σχετικιστικά φαινόμενα που πρέπει να ληφθούν υπόψη είναι αυτά της Ειδικής Σχετικότητας.

Στο παρόν SI μόνο το δευτερόλεπτο και το μέτρο καθορίζονται απευθείας από πραγματικά αναλλοίωτα. Όπως έχομε πει, το δευτερόλεπτο καθορίζεται από την περίοδο που αντιστοιχεί στη συχνότητα υπέρλεπτης μετάπτωσης του καισίου 133 όταν βρίσκεται στη θεμελιώδη κατάσταση. Το μέτρο καθορίζεται από την ταχύτητα του φωτός στο κενό. Ο ορισμός αυτός χρειάζεται το δευτερόλεπτο.

Το κέλβιν καθορίζεται από την κατάσταση του τριπλού σημείου του νερού. Αυτό είναι αναλλοίωτο της φύσης, αλλά η θερμοδυναμική θερμοκρασία του τριπλού σημείου εξαρτάται πολύ από την καθαρότητα του νερού και την ισοτοπική σύστασή του. Αυτό περιπλέκει τα πράγματα και περιορίζει την ακρίβεια που μπορεί να πραγματοποιηθεί στην πράξη ο καθορισμός του κέλβιν.

Ο καθορισμός των άλλων θεμελιωδών μονάδων έχουν πιο βασικές αδυναμίες.

Το χιλόγραμμο καθορίζεται με βάση ένα ανθρώπινο κατασκεύασμα, που είναι το ίδιο πρωτότυπο που φτιάχτηκε το 1889, το οποίο είναι γνωστό ότι μεταβάλλεται με το χρόνο για διάφορους λόγους και δεν είναι πραγματικό αναλλοίωτο. Δεν είναι γνωστό κατά πόσο ακριβώς μεταβάλλεται.

Η αδυναμία στον καθορισμό του αμπέρ, του μολ και της καντήλας προέρχεται κατά μεγάλο μέρος από την εξάρτησή τους από το χιλιόγραμμο, παρόλο που έχουν και άλλα προβλήματα.

Για αυτό ο καθορισμός του χιλιόγραμμου είναι πολύ βασικός για τη βελτίωση του SI.

Τονίζομε ότι με το νέο SI δεν θα αλλάξουν τα ονόματα των μονάδων που θα χρησιμοποιούνται ούτε θα αλλάξει ότι γίνεται μέχρι σήμερα με τη διαστατική ανάλυση. Τέτοια πράγματα αλλάζουν πολύ αργά.

Σε αυτό το σημείο πρέπει να τονίσομε ότι ενώ υπάρχει κάποια αυθαιρεσία στην επιλογή των φυσικών σταθερών που μπορεί να χρησιμοποιηθούν, υπάρχει το ερώτημα αν ένα ειδικό σύνολο σταθερών που επιλέγεται είναι επαρκές για να ορίσει ένα σύστημα μονάδων. Θα απαντήσομε ειδικά για τις σταθερές που επιλέγονται για το νέο SI, η διαδικασία επεκτείνεται και σε άλλες περιπτώσεις σταθερών. Είναι βολικό να χρησιμοποιήσομε γραμμική άλγεβρα για να δώσομε ένα απλό τεστ για την πληρότητα ενός συγκεκριμένου συνόλου σταθερών και να δείξομε τις σχέσεις μεταξύ διαφορετικών συνόλων σταθερών και μονάδων. Για να απλοποιήσομε τα πράγματα θα περιορίσομε τη διαδικασία σε πέντε από τις επτά μονάδες του γνωστού μας SI, δηλαδή θα περιοριστούμε στις μονάδες m, kg, s, A, K που αντιστοιχούν στο μήκος, στη μάζα, στο χρόνο, στο ηλεκτρικό ρεύμα και στη θερμοδυναμική θερμοκρασία. Φυσικά ότι λέμε μπορεί να επεκταθεί και για τις επτά μονάδες. Έχομε πει ότι η τιμή μιας φυσικής ποσότητας (μεγέθους) Q γράφεται στη γνωστή μορφή $Q = \{Q\}[Q]$, (1)

όπου $\{Q\}$ είναι η αριθμητική τιμή του Q και $[Q]$ η μονάδα μέτρησης.

Γενικώς έχομε

$$[Q] = \mathrm{m}^{p_1}\,\mathrm{kg}^{p_2}\,\mathrm{s}^{p_3}\,\mathrm{A}^{p_4}\,\mathrm{K}^{p_5}. \quad (2)$$

Οι (διαστατικοί) εκθέτες δίνουν τη διάσταση (ή διαστάσεις) του Q. Οι εκθέτες μπορεί να είναι οποιοιδήποτε πραγματικοί αριθμοί, όμως είναι συνήθως ακέραιοι ή πιθανόν ρητοί αριθμοί. Οι μονάδες ακολουθούν τους συνήθεις κανόνες πολλαπλασιασμού και διαίρεσης που ακολουθούν και οι φυσικές ποσότητες.

Μπορεί να γίνει αντιστοίχιση με τη γραμμική άλγεβρα, με το να συσχετίσομε το διάνυσμα υ_Q με τους εκθέτες των μονάδων του μεγέθους Q όπως παρακάτω.

$$\upsilon_Q = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Δεδομένη διάσταση καθορίζει ένα μοναδικό διάνυσμα, επομένως η αντιστοίχιση είναι καλά καθορισμένη. Το γινόμενο δυο ποσοτήτων Q, R όπου

$$[Q] = \mathrm{m}^{p_1}\,\mathrm{kg}^{p_2}\,\mathrm{s}^{p_3}\,\mathrm{A}^{p_4}\,\mathrm{K}^{p_5}, \quad (4)$$

$$[R] = \mathrm{m}^{s_1}\,\mathrm{kg}^{s_2}\,\mathrm{s}^{s_3}\,\mathrm{A}^{s_4}\,\mathrm{K}^{s_5}, \quad (5)$$

είναι

$$[QR] = [Q][R] = \mathrm{m}^{p_1+s_1}\,\mathrm{kg}^{p_2+s_2}\,\mathrm{s}^{p_3+s_3}\,\mathrm{A}^{p_4+s_4}\,\mathrm{K}^{p_5+s_5}. \quad (6)$$

Δηλαδή έχομε άθροισμα των αντίστοιχων διανυσμάτων

$$\upsilon_{QR} = \upsilon_Q + \upsilon_R\,. \qquad (7)$$

Επίσης ισχύει για μια ποσότητα που υψώνεται στη δύναμη a, η σχέση

$$\left[Q^a\right] = \left[Q\right]^a = \mathrm{m}^{ap_1}\,\mathrm{kg}^{ap_2}\,\mathrm{s}^{ap_3}\,\mathrm{A}^{ap_4}\,\mathrm{K}^{ap_5} \qquad (8)$$

οπότε

$$\upsilon_{Q^a} = a\upsilon_Q\,. \qquad (9)$$

Οι σχέσεις (7) και (9) δείχνουν ότι οι δυνάμεις που αντιστοιχίζονται σε μονάδες αποτελούν διανυσματικό χώρο, όπου ο πολλαπλασιασμός μονάδων σχετίζεται στην πρόσθεση των αντίστοιχων διανυσμάτων. Η ύψωση μονάδας σε μια δύναμη σχετίζεται με συνήθη πολλαπλασιασμό του σχετικού διανύσματος επί τη δύναμη. Τα διανύσματα που αντιστοιχούν στις θεμελιώδεις μονάδες του παρόντος SI σχηματίζουν μια βάση για αυτόν το διανυσματικό χώρο, αυτά τα διανύσματα βάσης είναι

$$\upsilon_{\mathrm{m}} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix},\quad \upsilon_{\mathrm{kg}} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\quad \upsilon_{\mathrm{s}} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\quad \upsilon_{\mathrm{A}} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\quad \upsilon_{\mathrm{K}} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}. \qquad (10)$$

Στη συνέχεια ας θεωρήσομε ότι παίρνομε ως θεμελιώδεις σταθερές τις $\nu_{\mathrm{Cs}}, c, h, e, k$.

Η σταθερά ν_{Cs} είναι η συχνότητα που αναφέραμε για το καίσιο 133 και έχει διαστάσεις (μετριέται σε) $\mathrm{m}^0\,\mathrm{kg}^0\,\mathrm{s}^{-1}\,\mathrm{A}^0\,\mathrm{K}^0 = \mathrm{s}^{-1}$. Αν κάνομε το ίδιο για τις άλλες θεμελιώδεις σταθερές θα έχομε

$$\upsilon_{\nu_{\mathrm{Cs}}} = \begin{pmatrix}0\\0\\-1\\0\\0\end{pmatrix},\quad \upsilon_c = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\\0\end{pmatrix},\quad \upsilon_h = \begin{pmatrix}2\\1\\-1\\0\\0\end{pmatrix},\quad \upsilon_e = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\\0\end{pmatrix},\quad \upsilon_k = \begin{pmatrix}2\\1\\-2\\0\\-1\end{pmatrix}. \qquad (11)$$

Αυτά τα διανύσματα μπορεί να αποτελέσουν μιαν άλλη βάση αν είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Είναι εύκολο να διαπιστωθεί ότι είναι γραμμικώς ανεξάρτητα διότι η σχέση με τα διανύσματα

$$a_1 \nu_{\mathrm{Cs}} + a_2 \upsilon_c + a_3 \upsilon_h + a_4 \upsilon_e + a_5 \upsilon_k = 0 \qquad (12)$$

ικανοποιείται μόνον αν $a_i = 0\ i = 1,2,...,5$. Από εμπειρία μπορούμε να πούμε ότι οι γνωστές μας θεμελιώδεις μονάδες του SI αποτελούν πλήρες σύνολο, βρήκαμε ότι αυτές οι θεμελιώδεις μονάδες μπορεί να εκφραστούν συναρτήσει των μονάδων των σταθερών άρα συμπεραίνομε ότι οι παραπάνω σταθερές αποτελούν πλήρες σύνολο.

Προχωρούμε στις γενικές σχέσεις μεταξύ διαφορετικών βάσεων. Η διάσταση $[Q]$ του μεγέθους Q μπορεί να εκφραστεί συναρτήσει μονάδων που σχετίζονται με σταθερές ή συνδυασμούς μονάδων που παριστάνονται με $c_1, c_2, ..., c_5$. Έχομε

$$[Q] = [c_1]^{s_1}[c_2]^{s_2}[c_3]^{s_3}[c_4]^{s_4}[c_5]^{s_5}. \qquad (13)$$

Από αυτό έχομε το διάνυσμα w των εκθετών

$$w_Q = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \\ s_5 \end{pmatrix}. \qquad (14)$$

Στη συνέχεια δίνομε τις σχέσεις μεταξύ των εκθετών της Εξ.(13) και της Εξ.(2).

Με χρήση των σχέσεων (7) και (9) βρίσκομε

$$\upsilon_Q = \sum_{j=1}^{5} s_j \upsilon_{cj} = M w_Q\,, \qquad (15)$$

όπου για τα στοιχεία (συνιστώσες) της μήτρας M ισχύουν

$$M_{ij} = \upsilon_{cj}^{i}, \quad i, j = 1,2,...,5\,. \qquad (16)$$

Διευκρινίζομε ότι ο δείκτης j αναφέρεται στη j-οστή σταθερά από τις πέντε (αντιστοίχως στην j-οστή μονάδα από συνδυασμό των πέντε μονάδων) . Ο δείκτης i αναφέρεται στην $i-$στή συνιστώσα του υ_{cj}. Συνοψίζομε λέγοντας ότι υ_{cj}^{i} είναι η $i-$στή συνιστώσα του διανύσματος υ_{cj}. Για τη βάση σταθερών του νέου SI που αναφέραμε προηγουμένως, έχομε

$$(c_1, c_2, c_3, c_4, c_5) = (\nu_{\mathrm{Cs}}, c, h, e, k). \quad (17)$$

Οι εκθέτες $(s_1, s_2, s_3, s_4, s_5)$ αυτών των σταθερών φαίνονται στις σχέσεις (11), οι εκθέτες $(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5)$ των θεμελιωδών μονάδων του παρόντος SI φαίνονται στις σχέσεις (10) οπότε η σχέση μεταξύ αυτών των ομάδων εκθετών για κάθε ποσότητα Q είναι

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \\ s_5 \end{pmatrix}. \quad (18)$$

Η περίπτωση $s_3 = 1, \ s_1 = s_2 = s_4 = s_5 = 0$ αντιστοιχεί στη σταθερά του Planck h, οπότε για αυτές τις τιμές από τη σχέση (18) βρίσκομε τους εκθέτες $p_1 = 2, p_2 = 1, p_3 = -1, p_4 = 0, p_5 = 0$, επομένως τελικώς έχομε

$$[h] = \mathrm{m^2\,kg\,s^{-1}}. \quad (19)$$

Δηλαδή έχομε τη μονάδα $[h]$ του νέου SI η οποία αντιστοιχεί στη σταθερά h εκφρασμένη στις μονάδες του παρόντος SI.

Επειδή το σύνολο των νέων μονάδων οι οποίες σχετίζονται με τις επιλεγμένες σταθερές είναι πλήρες, η Εξ.(18) μπορεί να αντιστραφεί και οδηγεί στη σχέση

$$\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \\ s_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \end{pmatrix}. \quad (20)$$

Το kg έχει $p_1 = 0, p_2 = 1, p_3 = 0, p_4 = 0, p_5 = 0$, οπότε από την Εξ.(20)

βρίσκομε $s_1 = 1, s_2 = -2, s_3 = 1, s_4 = 0, s_5 = 0$, άρα καταλήγομε στη σχέση

$$\mathrm{kg} = [\nu_{\mathrm{Cs}}][c]^{-2}[h]. \quad (21)$$

Δηλαδή έχομε τη θεμελιώδη μονάδα χιλιόγραμμο του παρόντος SI εκφρασμένη στις μονάδες που αντιστοιχούν στις σταθερές του νέου SI.

Μπορούμε να προχωρήσομε και σε μονάδες του παρόντος SI που δεν είναι θεμελιώδεις αλλά παράγωγες μονάδες, ας δούμε το newton (N). Για το νιούτον έχομε $1\,\mathrm{N} = \mathrm{m\,kg\,s^{-2}}$, επομένως $p_1 = 1, p_2 = 1, p_3 = -2, p_4 = 0, p_5 = 0$. Από την Εξ.(20) βρίσκομε

$s_1 = 2, s_2 = -1, s_3 = 1, s_4 = 0, s_5 = 0$, τελικώς

$$\mathrm{N} = \left[\nu_{\mathrm{Cs}}\right]^2 \left[c\right]^{-1} \left[h\right]. \quad (22)$$

Αν επιλέξομε τα $\{\nu_{\mathrm{Cs}}, c, \bar{\lambda}_{\mathrm{e}}, \mu_0, k\}$, όπου $\bar{\lambda}_{\mathrm{e}}$ είναι το ανηγμένο μήκος κύματος Compton $\left(\lambda_{\mathrm{e}}/(2\pi)\right)$ και μ_0 η μαγνητική σταθερά, ως θεμελιώδεις σταθερές τότε μπορούμε να δούμε πολύ εύκολα ότι τα διανύσματα τα αντίστοιχα αυτών που φαίνονται στις σχέσεις (11) δεν θα είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους διότι η αντίστοιχη της σχέσης (12) θα έχει και μη τετριμμένες λύσεις (δηλαδή και άλλες λύσεις εκτός από τη μηδενική). Επομένως αυτή η επιλογή δεν είναι κατάλληλη. Μπορεί όμως να βρεθούν και άλλες ομάδες σταθερών που είναι κατάλληλες.

Θα πούμε δυο λόγια για το ρόλο των θεμελιωδών μονάδων σε ένα σύστημα μονάδων. Στην Εξ.(2) ξεκινήσαμε εκφράζοντας τη διάσταση μιας ποσότητας σε δυνάμεις των θεμελιωδών μονάδων του παρόντος SI. Όμως, η ανάλυση των σχέσεων μεταξύ διαφόρων ομάδων μονάδων μπορεί να ξεκινήσει από οποιοδήποτε αυθαίρετο (κατάλληλο) σύνολο ως βάση.

Μπορεί να ξεκινήσει κάποιος από κάποιο συνδυασμό μονάδων, τον οποίο ας παραστήσομε με $[c_1],[c_2],[c_3],[c_4],[c_5]$. Ισχύουν οι σχέσεις (13), (14). Η συσχέτιση με την έκφραση για τις διαστάσεις του μεγέθους Q ως προς ένα άλλο σύνολο μονάδων που παριστάνονται με $[d_1],[d_2],[d_3],[d_4],[d_5]$, γίνεται με χρήση των ορισμών

$$[Q] = [d_1]^{t_1} [d_2]^{t_2} [d_3]^{t_3} [d_4]^{t_4} [d_5]^{t_5}, \quad (23)$$

και

$$y_Q = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \\ t_5 \end{pmatrix}. \qquad (24)$$

Από αυτά έχομε

$$z_Q = \sum_{j=1}^{5} t_j z_{d_j} = N\, y_Q, \qquad (25)$$

όπου τα στοιχεία της μήτρας N είναι

$$N_{ij} = z^i_{d_j}, \qquad (26)$$

βλέπε τα προηγούμενα. Εδώ η συσχέτιση μεταξύ των δυο συνόλων μονάδων γίνεται χωρίς αναφορά στις θεμελιώδεις μονάδες του παρόντος SI. Παρόλα αυτά η χρήση των γνωστών θεμελιωδών μονάδων μπορεί να είναι χρήσιμη για αυτή τη συσχέτιση. Αυτό συμβαίνει αν οι σταθερές $d_1, d_2, ...,$ δεν είναι γνωστές συναρτήσει των διαφορετικών σταθερών $c_1, c_2, ...,$ αλλά είναι γνωστές (όπως και οι $c_1, c_2, ...,$) συναρτήσει των θεμελιωδών μονάδων του παρόντος SI.

Σε αυτή την περίπτωση θα ισχύουν

$$\begin{aligned} z_Q &= M' x_Q \\ y_Q &= M\, x_Q \end{aligned} \quad . \qquad (27)$$

όπου x_Q είναι το διάνυσμα που αναφέρεται στις θεμελιώδεις μονάδες, και προφανώς σύμφωνα με την υπόθεσή μας, οι μήτρες M' και M είναι γνωστές. Έτσι από τις σχέσεις (25), (27) βρίσκομε $M' x_Q = N M\, x_Q$ άρα για τη μήτρα N έχομε

$$N = M^{-1} M'. \quad (28)$$

Η παρατήρηση είναι πως στο νέο SI οι θεμελιώδεις μονάδες παίζουν κάποιο χρήσιμο ρόλο αλλά όχι ουσιώδη. Κοιτάζοντας τις στήλες της τετραγωνικής μήτρας της Εξ.(20), οι οποίες δείχνουν την εξάρτηση των θεμελιωδών μονάδων του παρόντος SI από τις σταθερές του νέου SI, συμπεραίνομε ότι εκτός από μια (το δευτερόλεπτο) όλες οι άλλες θεμελιώδεις μονάδες εκφράζονται συναρτήσει δυο ή περισσότερων θεμελιωδών σταθερών. Επομένως στο νέο SI , η συσχέτιση μιας θεμελιώδους μονάδας με μια σταθερά θα ήταν αυθαίρετη και μη αναγκαία.

Στο νέο SI θα θεωρηθούν οι τιμές των ανωτέρω θεμελιωδών σταθερών ως ακριβώς καθορισμένες, μετρούμενες με τις συνήθεις θεμελιώδεις μονάδες του παρόντος SI. Αυτό είναι αρκετό για τον καθορισμό του νέου συστήματος μονάδων. Οι θεμελιώδεις μονάδες του παρόντος SI μπορούν να παραχθούν από αυτό το σύνολο σταθερών, έτσι μπορεί να πει κάποιος ότι αυτές οι μονάδες είναι παράγωγες μονάδες στο νέο SI . Γενικώς, στο νέο SI που στηρίζεται σε θεμελιώδεις σταθερές (σταθερές αναφοράς) δε χρειάζεται ο διαχωρισμός σε θεμελιώδεις και παράγωγες μονάδες.

Θα πούμε δυο λόγια ξανά για τους όρους, μέγεθος (ποσότητα), τιμή μεγέθους και αριθμητική τιμή μεγέθους. Ξαναθυμίζομε τη γνωστή σχέση

$$A = \{A\}[A]. \quad (29)$$

Γράφομε αυτή τη σχέση στη μορφή

$$[A] = \frac{A}{\{A\}}. \quad (30)$$

Το A θεωρείται ένα αναλλοίωτο μέγεθος, οι μονάδες $[A]$ αυτού του μεγέθους, είναι το πηλίκο του αναλλοίωτου A δια μιας καθορισμένης (δηλαδή ακριβούς) αριθμητικής τιμής $\{A\}$.

Με απλά λόγια, καθορίζομε ακριβώς την αριθμητική τιμή μιας ποσότητας που μπορεί να προκύπτει από την ιδιότητα κάποιου ατόμου ή συστατικού, ή ναι είναι μια θεμελιώδης σταθερά, και έτσι καθορίζομε τις (τη) μονάδες(δα) της ποσότητας.

Ας δούμε με αυτό το πνεύμα τους ορισμούς των επτά θεμελιωδών μονάδων του τρέχοντος SI. Στη συνέχεια θα δούμε στο ίδιο πνεύμα το νέο SI.

1. Το δευτερόλεπτο και η σταθερά ν_{Cs}

Το δευτερόλεπτο είναι η διάρκεια 9 192 631 770 περιόδων της ακτινοβολίας που αντιστοιχεί στην μετάπτωση μεταξύ των δυο υπέρλεπτων σταθμών της βασικής (θεμελιώδους) κατάστασης του ατόμου του καισίου 133.

Από αυτόν τον ορισμό προκύπτει ότι

$$\mathrm{s} = 9\ 192\ 631\ 770\left(\frac{1}{\nu_{\mathrm{Cs}}}\right), \quad (31)$$

επίσης

$$\mathrm{Hz} = \frac{\nu_{\mathrm{Cs}}}{9\ 192\ 631\ 770}. \quad (32)$$

Επομένως

$\nu_{\mathrm{Cs}} = 9\ 192\ 631\ 770\ \mathrm{Hz}$. (33)

Παρατηρούμε ότι η σχέση (31) ορίζει το δευτερόλεπτο, η σχέση (32) είναι ίδια με τη σχέση (30) και ορίζει το Hz. Η σχέση (33), που είναι ίδια με τη σχέση (29), μας λέει ότι η σταθερά αναφοράς είναι η ν_{Cs} της οποίας η αριθμητική τιμή καθορίζεται όταν εκφράζεται στην μονάδα της στο τρέχον SI που είναι το Hz.

2. Το μέτρο και η σταθερά c

Το μέτρο είναι το μήκος της διαδρομής που διανύει το φως στο κενό κατά το χρονικό διάστημα 1/299 792 458 του δευτερολέπτου.

Ισχύει η γνωστή σχέση $l = c\,t$. Επομένως από τον ορισμό του μέτρου προκύπτει ότι

$$\mathrm{m} = c\left(\frac{1\mathrm{s}}{299\ 792\ 458}\right), \quad (34)$$

ή $$\mathrm{m\,s^{-1}} = \frac{c}{299\ 792\ 458} \quad (35)$$

επομένως

$$c = 299\ 792\ 458\ \mathrm{m\,s^{-1}}. \quad (36)$$

Σε αυτή την περίπτωση παρατηρούμε ότι παρόλο που τυπικά η (34) ορίζει το μέτρο, όμως ο ορισμός εξαρτάται και από τον ορισμό του δευτερολέπτου. Η εξίσωση (35) ορίζει τη μονάδα $\mathrm{m\,s^{-1}}$. Από τη σχέση (36) προκύπτει ότι η σταθερά αναφοράς είναι η c, της οποίας η αριθμητική τιμή είναι ακριβώς καθορισμένη όταν εκφράζεται στις μονάδες της στο τρέχον SI δηλαδή σε $\mathrm{m\,s^{-1}}$. Τονίζομε ότι ο τυπικός ορισμός του μέτρου στην πραγματικότητα δεν ορίζει το μέτρο αλλά τη μονάδα $\mathrm{m\,s^{-1}}$, επομένως χωρίς τον ορισμό του δευτερολέπτου ο ορισμός του μέτρου δεν είναι πλήρης.

3. Το χιλιόγραμμο και η σταθερά $m(\mathcal{K})$

Το χιλιόγραμμο είναι η μονάδα της μάζας και ισούται με τη μάζα του διεθνούς πρωτότυπου του χιλιόγραμμου.

Το διεθνές πρωτότυπο του χιλιόγραμμου, (IPK, international prototype of the kilogram) παριστάνεται με το σύμβολο $\mathcal{K}$, οπότε το σύμβολο για τη μάζα του είναι το $m(\mathcal{K})$. Από τον ορισμό του χιλιόγραμμου προκύπτει ότι

$$\mathrm{kg} = m(\mathcal{K}) \quad (37)$$

ή

$$\mathrm{kg} = \frac{m(\mathcal{K})}{1} \quad (38)$$

επομένως

$$m(\mathcal{K}) = 1\,\mathrm{kg}\,. \quad (39)$$

Εδώ βλέπομε ότι η σχέση (37) τυπικά ορίζει το χιλιόγραμμο, επίσης η σχέση (38) κάνει το ίδιο και από την (39) προκύπτει ότι η σταθερά αναφοράς είναι η $m(\mathcal{K})$, της οποίας η αριθμητική τιμή καθορίζεται όταν εκφράζεται στη μονάδα της στο παρόν SI, που είναι το kg (χιλιόγραμμο). Στην πραγματικότητα η μάζα του πρωτότυπου χιλιόγραμμου (IPK) δεν είναι μια σταθερά της φύσης με την έννοια που είναι το c και το ν_{Cs}, αλλά είναι ένα ανθρώπινο κατασκεύασμα που φυλάσσεται επί πολλά χρόνια σε ένα χώρο στις Σέβρες στη Γαλλία. Οι μετρήσεις δείχνουν ότι η μάζα του μεταβάλλεται με το χρόνο και μάλιστα κατά μη προσδιορίσιμο τρόπο. Αυτή είναι μια από τις κύριες αιτίες για την εισαγωγή του νέου SI.

4. Το αμπέρ και η σταθερά μ_0

Το αμπέρ είναι εκείνο το σταθερό (ηλεκτρικό) ρεύμα το οποίο, αν ρέει σε δυο ευθύγραμμους παράλληλους αγωγούς απείρου μήκους, οι οποίοι έχουν αμελητέα κυκλική διατομή, και βρίσκονται σε μεταξύ τους απόσταση ίση με 1 m, στο κενό, δημιουργεί δύναμη μεταξύ των αγωγών ίση με 2×10^{-7} νιούτον ανά μέτρο του μήκους τους.

Η έκφραση από την ηλεκτρομαγνητική θεωρία για τη δύναμη F ανά μήκος l μεταξύ δύο αγωγών όπως λέει ο παραπάνω ορισμός, σε μεταξύ τους απόσταση d, είναι

$$\frac{F}{l}=\frac{\mu_0 I^2}{2\pi d}.$$

Από τον ορισμό του αμπέρ προκύπτει ότι

$$\mathrm{A}=\left(\frac{4\pi\times10^{-7}}{\mu_0}\mathrm{N}\right), \quad (40)$$

ή

$$\mathrm{N\,A}^{-2}=\frac{\mu_0}{4\pi\times10^{-7}} \quad (41)$$

επομένως

$$\mu_0=4\pi\times10^{-7}\mathrm{N\,A}^{-2}. \quad (42)$$

Παρατηρούμε ότι η σχέση (40) ορίζει τυπικά το αμπέρ, αλλά αυτό εξαρτάται από τους ορισμούς των s, m, kg αφού $\mathrm{N}=\mathrm{s}^{-2}\mathrm{m\,kg}$. Επίσης βλέπομε ότι η σχέση (41) ορίζει τις μονάδες $\mathrm{N\,A}^{-2}=\mathrm{s}^{-2}\mathrm{m\,kg\,A}^{-2}$. Η σχέση (42) δείχνει ότι η σταθερά αναφοράς είναι η μ_0 της οποίας η αριθμητική τιμή καθορίζεται ακριβώς όταν εκφράζεται στις μονάδες της στο παρόν SI που είναι $\mathrm{N\,A}^{-2}=\mathrm{s}^{-2}\,\mathrm{m\,kg\,A}^{-2}$, εκφράζεται και στην ισοδύναμη μονάδα $\mathrm{H\,m}^{-1}$, όπου $\mathrm{H}=\mathrm{s}^{-2}\,\mathrm{m}^2\,\mathrm{kg\,A}^{-2}$. Και σε αυτή την περίπτωση σημειώνομε ότι ο αρχικός ορισμός για το αμπέρ δεν ορίζει στην πραγματικότητα το A αλλά τη μονάδα

$\mathrm{N\,A^{-2}} = \mathrm{s^{-2}m\,kg\,A^{-2}}$, επομένως χρειάζονται για τον πλήρη ορισμό οι ορισμοί του δευτερολέπτου, του μέτρου και του χιλιόγραμμου.

5. Το κέλβιν και η σταθερά T_{TPW}

Το κέλβιν είναι η μονάδα της θερμοδυναμικής θερμοκρασίας και ορίζεται ως το πηλίκο 1/273,16 της θερμοδυναμικής θερμοκρασίας του τριπλού σημείου του νερού, T_{TPW}.

Καταρχήν το T_{TPW} είναι μια αναλλοίωτη σταθερά. Από τον ορισμό προκύπτει για το κέλβιν (K),

$$\mathrm{K} = \frac{T_{\mathrm{TPW}}}{273{,}16}, \quad (43)$$

επομένως

$$T_{\mathrm{TPW}} = 273{,}16\ \mathrm{K}. \quad (44)$$

Παρατηρούμε ότι το κέλβιν ορίζεται από τη σχέση (43) και από τη σχέση (44) η σταθερά αναφοράς είναι η T_{TPW} της οποίας η αριθμητική τιμή είναι ακριβώς καθορισμένη όταν εκφράζεται στη μονάδα της στο τρέχον SI που είναι το K.

Έχομε κάμει κάποια σχόλια για την αδυναμία που υπάρχει στη διαδικασία πραγματοποίησης της κατάστασης του τριπλού σημείου του νερού.

6. Το μολ και η σταθερά $M(^{12}\mathrm{C})$

1. Το μολ (γραμμομόριο) είναι το ποσό ουσίας (ή της ύλης) ενός συστήματος το οποίο αποτελείται από τόσες στοιχειώδεις οντότητες όσα είναι τα άτομα σε 0,012 χιλιόγραμμα άνθρακα 12. Το διεθνές σύμβολο είναι mol.

2. Όταν χρησιμοποιείται το μολ, πρέπει να αναφέρονται ποιες είναι οι στοιχειώδεις οντότητες οι οποίες είναι δυνατόν να είναι άτομα, μόρια, ιόντα, ηλεκτόνια, άλλα σωματίδια ή καθορισμένες ομάδες τέτοιων σωματιδίων.

Η γραμμομοριακή μάζα (molar mass) μιας οντότητας X, σύμβολο $M(X)$, είναι η μάζα του X διαιρούμενη δια του ποσού της ουσίας n του X. Η παράγωγη μονάδα του στο τρέχον SI είναι το χιλιόγραμμο ανά μολ, $\mathrm{kg\,mol^{-1}}$. Όταν η οντότητα X είναι το άτομο του άνθρακα 12, σύμβολο $^{12}\mathrm{C}$, τότε προκύπτει από τον ορισμό του μολ ότι η γραμμομοριακή μάζα του άνθρακα 12 είναι 0,012 χιλιόγραμμα διαιρούμενα δια ένα μολ, δηλαδή χιλιόγραμμα ανά μολ. Επομένως $M(^{12}\mathrm{C}) = 0,012\,\mathrm{kg/(1\ mol)}$, άρα

$$\mathrm{mol} = \frac{0,012\,\mathrm{kg}}{M(^{12}\mathrm{C})}, \quad (45)$$

ή

$$\mathrm{kg\,mol^{-1}} = \frac{M(^{12}\mathrm{C})}{0,012} \quad (46)$$

οπότε

$$M(^{12}\mathrm{C}) = 0,012\,\mathrm{kg\,mol^{-1}} \quad . \quad (47)$$

Παρατηρούμε ότι ο ορισμός (45) του μολ χρειάζεται τον ορισμό του χιλιόγραμμου, επίσης η σχέση (46) ορίζει τη μονάδα $\mathrm{kg\,mol^{-1}}$. Η σχέση (47) λέει ότι η σταθερά αναφοράς είναι η $M(^{12}\mathrm{C})$, της οποίας η αριθμητική τιμή είναι ακριβώς καθορισμένη όταν εκφράζεται στις μονάδες της στο τρέχον SI.

7. Η καντήλα και η σταθερά K_{cd}

Η καντήλα είναι η φωτεινή ένταση (φωτοβολία), σε δεδομένη κατεύθυνση, μιας πηγής η οποία εκπέμπει μονοχρωματική ακτινοβολία συχνότητας 540×10^{12} χερτζ και η οποία έχει ένταση ακτινοβολίας σε αυτή την κατεύθυνση 1/683 βατ ανά στερακτίνιο.

Η φωτοβολία, I_{v}, της μονοχρωματικής ακτινοβολίας σε δεδομένη κατεύθυνση, σχετίζεται με την ένταση της ακτινοβολίας , I_{e}, στην ίδια κατεύθυνση και τη φασματική φωτεινή αποτελεσματικότητα , K, της ακτινοβολίας στη συχνότητα ακτινοβολίας, σύμφωνα με την εξίσωση, $I_{\mathrm{v}} = I_{\mathrm{e}}\,K$. Εφαρμόζομε αυτή τη σχέση στον ορισμό της καντήλας με $I_{\mathrm{v}} = 1\,\mathrm{cd}$ και $I_{\mathrm{e}} = (1/683)\,\mathrm{W\,sr^{-1}}$ και παριστάνοντας το K με το K_{cd} για τη συχνότητα $540\times10^{12}\,\mathrm{Hz}$, καταλήγομε στη σχέση

$$\mathrm{cd} = \frac{K_{\mathrm{cd}}}{683}\,\mathrm{W\,sr^{-1}}, \quad (48)$$

και επειδή $\mathrm{lm} = \mathrm{cd\,sr}$ έχομε

$$\mathrm{lm\,W^{-1}} = \frac{K_{\mathrm{cd}}}{683} \quad (49)$$

επομένως

$$K_{\mathrm{cd}} = 683\,\mathrm{lm\,W^{-1}}. \quad (50)$$

Παρατηρούμε ότι ο τυπικός ορισμός της καντήλας από τη σχέση (48) δεν αρκεί, έχομε εξάρτηση από τις μονάδες s, m, kg διότι $\mathrm{W} = \mathrm{s^{-3}\,m^2\,kg}$ (και $\mathrm{sr} = \mathrm{m^2\,m^{-2}} = 1$).
Η σχέση (49), εφόσον $\mathrm{lm} = \mathrm{cd\,sr}$, ορίζει τη μονάδα $\mathrm{lm\,W^{-1}} = \mathrm{s^3\,m^{-2}\,kg^{-1}\,cd\,sr}$. Από τη σχέση (50) φαίνεται η σταθερά αναφοράς K_{cd} της οποίας η αριθμητική τιμή είναι ακριβώς καθορισμένη, μετρούμενη στις μονάδες της στο παρόν SI, που είναι $\mathrm{lm\,W^{-1}} = \mathrm{s^3\,m^{-2}\,kg^{-1}\,cd\,sr}$. Τονίζομε ότι ο τυπικός ορισμός της καντήλας στην πραγματικότητα ορίζει τη μονάδα $\mathrm{lm\,W^{-1}} = \mathrm{s^3\,m^{-2}\,kg^{-1}\,cd\,sr}$, οπότε ο ορισμός του cd χρειάζεται τον ορισμό του δευτερολέπτου, του μέτρου και του χιλιόγραμμου.

Χωρίς να προχωρήσομε σε λεπτομέρειες απλώς σημειώνομε ότι ο ορισμός των θεμελιωδών μονάδων του παρόντος (τρέχοντος) SI αναφέρεται ως "explicit unit" definition, δηλαδή χαρακτηρίζονται με ακριβή ορισμό της μονάδων. Το νέο SI χαρακτηρίζεται από "explicit constant", δηλαδή με ακριβή ορισμό σταθερών. Αυτά γίνονται κατανοητά από τον τρόπο που εισάγονται τα δυο συστήματα.

Θεωρείται βολικό να αλλάξει η διάταξη των καθιερωμένων στο παρόν SI θεμελιωδών μονάδων. Συγκεκριμένα, είναι προτιμότερη η διάταξη s, m, kg, A, K, mol, cd, που ήδη χρησιμοποιήσαμε, διότι με αυτή παρόλο που πολλοί ορισμοί των μονάδων εξαρτώνται από τους ορισμούς των άλλων της λίστας, κανείς ορισμός δεν εξαρτάται από μονάδα που έπεται στη λίστα. Για παράδειγμα το δευτερόλεπτο δεν εξαρτάται από τον ορισμό καμιάς από τις άλλες μονάδες, το μέτρο εξαρτάται μόνο από το δευτερόλεπτο κτλ.

13.1 Το νέο SI

Σημειώνομε ότι πολλές από τις σχέσεις (31)-(50) που ισχύουν για το τρέχον SI ισχύουν και για το νέο SI. Στο νέο SI υπάρχουν επτά θεμελιώδεις ποσότητες, επτά θεμελιώδεις σταθερές ή σταθερές αναφοράς, βλέπε Πίνακα 24.

Πίνακας 24

Θεμελιώδη μεγέθη του νέου SI

Θεμελιώδη μεγέθη	Σταθερά αναφοράς	Ορισμός
1) συχνότητα	ν_{Cs}	Η συχνότητα που οφείλεται στην μετάπτωση μεταξύ των δυο σταθμών της υπέρλεπτης υφής του καισίου 133 στη βασική του κατάσταση είναι 9 192 631 770 Hz, ακριβώς .
2) ταχύτητα	c	Η ταχύτητα του φωτός στο κενό είναι 299 792 458 m/s ακριβώς.
3) δράση	h	Η σταθερά Planck είναι $6,626...\times 10^{-34}$ J s ακριβώς.
4) ηλεκτρικό φορτίο	e	Το στοιχειώδες φορτίο είναι $1,602...\times 10^{-19}$ C ακριβώς.
5) θερμοχωρητικότητα	k	Η σταθερά Boltzmann είναι $1,380...\times 10^{-23}$ J/K ακριβώς.
6) ποσό ουσίας (ή ύλης)	N_{A}	Η σταθερά Avogadro είναι $6,022...\times 10^{23}\ \mathrm{mol}^{-1}$ ακριβώς.
7) φωτοβολία (φωτεινή ένταση)	K_{cd}	Η φωτεινή αποτελεσματικότητα K_{cd} για μονοχρωματική ακτινοβολία συχνότητας 540×10^{12} Hz είναι 683 lm/W ακριβώς.

Το σύμβολο … δηλώνει ότι πρέπει να μπουν επιπλέον ψηφία στην αριθμητική τιμή.

Ο ορισμός των επτά θεμελιωδών μονάδων του παρόντος SI που θα χρησιμοποιούνται ως μονάδες και στο νέο SI είναι όπως φαίνεται παρακάτω. Καθορίζονται από τις παραπάνω θεμελιώδεις φυσικές σταθερές, τις σταθερές αναφοράς.

Α) Το δευτερόλεπτο, μονάδα χρόνου

Το δευτερόλεπτο, s, είναι η μονάδα χρόνου. Η τιμή του καθορίζεται από τη σταθερά ν_{Cs}, που αναφέρεται στο 1) του Πίνακα 24, που η τιμή της εκφράζεται σε s^{-1} (ισούται με Hz).

Αποτέλεσμα αυτού είναι ότι το δευτερόλεπτο έχει χρονική διάρκεια 9 192 631 770 περιόδων της αναφερόμενης μετάπτωσης.

Β) Το μέτρο, μονάδα μήκους

Το μέτρο, m, είναι η μονάδα μήκους. Η τιμή του καθορίζεται από τη σταθερά c, που αναφέρεται στο 2) του Πίνακα 24, που η τιμή της εκφράζεται σε $\mathrm{m\,s}^{-1}$.

Συμπεραίνεται ότι το μέτρο είναι η απόσταση που διανύει το φως στο κενό σε χρονικό διάστημα ίσο με 1/299 792 458 s.

Γ) Το χιλιόγραμμο, μονάδα μάζας

Το χιλιόγραμμο, kg, είναι η μονάδα μάζας. Η τιμή του καθορίζεται από τη σταθερά h, που αναφέρεται στο 3) του Πίνακα 24, που η τιμή της εκφράζεται σε $\mathrm{s}^{-1}\mathrm{m}^{2}\mathrm{kg}$ (ισούται με J s).

Δ) Το αμπέρ, μονάδα του ηλεκτρικού ρεύματος

Το αμπέρ, A, είναι η μονάδα του ηλεκτρικού ρεύματος. Η τιμή του καθορίζεται από τη σταθερά e, που αναφέρεται στο 4) του Πίνακα 24, που η τιμή της εκφράζεται σε s A (ισούται με C, κουλόμπ).

Αποτέλεσμα αυτού του ορισμού είναι ότι το αμπέρ είναι το ηλεκτρικό ρεύμα που αντιστοιχεί σε ροή $1/(1{,}602\ 176...\times 10^{-19})$ στοιχειωδών φορτίων το δευτερόλεπτο.

Ε) Το κέλβιν, μονάδα θερμοδυναμικής θερμοκρασίας

Το κέλβιν, K, είναι η μονάδα της θερμοδυναμικής θερμοκρασίας. Η τιμή του καθορίζεται από τη σταθερά k, που αναφέρεται στο 5) του Πίνακα 24, που εκφράζεται σε μονάδες $\mathrm{s^{-2} m^2 kg\, K^{-1}}$ (ισούται με $\mathrm{J\, K^{-1}}$).

Αποτέλεσμα αυτού του ορισμού είναι ότι το κέλβιν ισούται με τη μεταβολή της θερμοδυναμικής θερμοκρασίας που προκύπτει από μεταβολή της θερμικής ενέργειας kT κατά $1{,}380\ 648...\times 10^{-23}\ \mathrm{J}$.

ΣΤ) Το μολ (γραμμομόριο), μονάδα ποσού ουσίας (ή ύλης)

Το μολ, mol, είναι η μονάδα του ποσού ουσίας κατά τα γνωστά. Η τιμή του καθορίζεται από τη σταθερά N_{A}, που αναφέρεται στο 7) του Πίνακα 24, που εκφράζεται στη μονάδα $\mathrm{mol^{-1}}$.

Αποτέλεσμα αυτού του ορισμού είναι ότι το μολ είναι το ποσό ουσίας ενός συστήματος που περιέχει $6{,}022\ 141...\times 10^{23}$ καθορισμένες στοιχειώδεις οντότητες.

Ζ) Η καντήλα, μονάδα φωτοβολίας (φωτεινής έντασης)

Η καντήλα, cd, είναι η μονάδα φωτοβολίας σε ορισμένη κατεύθυνση. Η τιμή της καθορίζεται από τη σταθερά K_{cd}, που αναφέρεται στο 7) του Πίνακα 24, που εκφράζεται σε $\mathrm{s^3 m^{-2} kg^{-1} cd\, sr}$ (ισούται με $\mathrm{cd\, sr\, W^{-1}}$ και $\mathrm{lm\, W^{-1}}$).

Αποτέλεσμα αυτού του ορισμού είναι ότι η καντήλα είναι η φωτοβολία προς δεδομένη κατεύθυνση, πηγής που εκπέμπει μονοχρωματική ακτινοβολία $540\times 10^{12}\ \mathrm{Hz}$ ενώ έχει ένταση ακτινοβολίας σε αυτή την κατεύθυνση 1/683 $(1/683)\ \mathrm{W\, sr^{-1}}$.

Τελειώνοντας αναφέρομε ότι οι ορισμοί των μονάδων με βάση σταθερές της φύσης έχει μεγάλη επίδραση στη μετρολογία και γενικώς στις μετρήσεις μεγάλης ακρίβειας. Σταθερές όπως η σταθερά Josephson $K_{\mathrm{J}} = 2e/h$ έχει τιμή ακριβώς. Το ίδιο ισχύει για τη σταθερά von Klitzing $R_{\mathrm{K}} = h/e^2$. Οι σταθερές αυτές σχετίζονται με μετρήσεις ακριβείας ηλεκτρικών τάσεων και αντιστάσεων. Δηλαδή με τα πρότυπα μετρήσεως αυτών των ηλεκτρικών μεγεθών.

Αναφέρομε επίσης ότι μπορεί να γίνει μέτρηση μαζών της τάξης μεγέθους του χιλιόγραμμου βασισμένη σε κβαντικές σταθερές και στους ορισμούς του νέου SI, όπου οι σταθερές h, e και επομένως και οι K_{J}, R_{K} έχουν ακριβείς τιμές. Αυτό μπορεί να γίνει με χρήση του ζυγού βατ (watt balance). Το w είναι πεζό διότι η συσκευή πήρε το όνομά της επειδή εμφανίζεται κατά τη διαδικασία το γινόμενο τάσης επί ρεύμα που έχει διαστάσεις ισχύος (μονάδα είναι το watt). Προφανώς το όνομα δεν έχει σχέση με τον άνθρωπο James Watt.

Όπως και στο παρελθόν, κάθε φορά που αλλάζει ο ορισμός κάποιας μονάδας αυτό γίνεται κατά τρόπο που να μην αλλάξουν κατά πολύ κάποια μεγέθη. Έτσι θα γίνει και με την περίπτωση του νέου SI.

Στον Πίνακα 25 δίνομε ενδεικτικά τις τιμές κάποιων σταθερών με τις αντίστοιχες αβεβαιότητες στο παλιό SI και στο νέο SI.

Πίνακας 25

Το αποτέλεσμα αλλαγής από το παρόν SI στο νέο SI πάνω στις σχετικές αβεβαιότητες μερικών σταθερών.

σταθερά	αβεβαιότητα στο τρέχον SI	αβεβαιότητα στο νέο SI
$m(\mathcal{K})$	0	$4{,}4\times10^{-8}$
h	$4{,}4\times10^{-8}$	0
μ_0	0	$3{,}2\times10^{-10}$
e	$2{,}2\times10^{-8}$	0
T_{TPW}	0	$9{,}1\times10^{-7}$
m_{e}	$4{,}4\times10^{-8}$	$0{,}064\times10^{-8}$
$M(^{12}\mathrm{C})$	0	$0{,}070\times10^{-8}$
K_{J}	$2{,}2\times10^{-8}$	0

Βιβλιογραφία

1) INTERNATIONAL STANDARD ISO 31-0, Third edition 1992-08-01

2) SYMBOLS, UNITS, NOMENCLATURE AND FUNDAMENTAL CONSTANTS IN PHYSICS, 1987 REVISION, by E.Richard Cohen and Pierre Giacomo, International Union of Pure and Applied Physics, Document I.U.P.A.P. -25 (SUNAMCO 87-1)\

3) Le Système international d' unités The International System of Units, SI 8e édition 2006, Bureau international des poids et mesures Organisation intergouvernementale de la Convention du Mètre

4) International vocabulary of metrology – Basic and general concepts and associated terms (VIM)

Vocabulaire international de métrologie – Concepts fondamentaux et généraux et termes associés (VIM) BIPM, JCGM 200 :2008

5) Le Système international d' unités (SI) The International System of Units

Supplément 2014 : mise à jour de la 8e édition de la Brochure sur le SI (2006)

Supplement 2014: updates to the 8th edition (2006) of the SI Brochure

Bureau international des poids et mesures

6) SI : Το Διεθνές Σύστημα Μονάδων, ΕΛΟΤ, Αθήνα 1999

7) GUIDE FOR METRIC PRACTICE, by Robert A. Nelson, PHYSICS TODAY, August 1998

8) Νόμιμες μονάδες μετρήσεως στην Ελλάδα, ΕΦΗΜΕΡΙΣ ΤΗΣ ΚΥΒΕΡΝΗΣΕΩΣ ΤΗΣ ΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑΣ, Προεδρικό Διάταγμα, ΤΕΥΧΟΣ ΠΡΩΤΟ, Αρ. Φύλλου 196, Αθήνα 30 ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΥ 1983

9) On Electric and Magnetic Units and Dimensions, R. T. Birge, Am. Phys. Teacher 2, 41 (1934)

10) On the Establishment of Fundamental and Derived Units, with Special Reference to Electric Units. Part I, Raymond T. Birge, Am. Phys. Teacher , Vol. 41, No. 2 (1934) pp 102-109

11) On the Establishment of Fundamental and Derived Units, with Special Reference to Electric Units. Part II, Raymond T. Birge, Am. Phys. Teacher , Vol. 102, No. 3 (1935) pp 171-179

12) Dimensional Analysis and Theory of Models, by Henry L. Langhaar, Robert E. Krieger Publishing company, 1951

13) UNITS, DIMENSIONAL ANALYSIS AND PHYSICAL SIMILARITY, by B. S. Massey, Van Nostrand Reinhold Company, 1971

14) Dimensional Methods in Engineering and Physics, by E. de St Q. Isaacson and M. de St Q. Isaacson, Edward Arnold, 1975

15) Από τα κουάρκ μέχρι το Σύμπαν, Μια σύντομη περιήγηση, του Ελευθερίου Ν. Οικονόμου, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2012

16) ΑΝΑΛΥΣΗ ΚΑΙ ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΩΝ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ, του Κώστα Χριστοδουλίδη, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Ε.Μ.Π., 2009

17) ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΤΩΝ ΡΕΥΣΤΩΝ Τόμος Ι, του Άγγελου Θ. Παπαϊωάννου, Εκδόσεις ΚΟΡΑΛΙ, 2002

18) METROLOGY QUO VADIS?, by Dieter Kind and Terry Quinn, PHYSICS TODAY, August 1998

19) A more fundamental International System of Units, by David B. Newell, Physics Today, July 2014

20) Defining units in the quantum based SI, By Peter J. Mohr, Metrologia 45 (2008) 129-133

21) Redefinition of the kilogram, ampere, kelvin and mole: a proposed approach to implementing CIPM recommendation 1 (CI-2005), by Ian M. Mills, Peter J. Mohr, Terry J. Quinn, Barry N. Taylor and Edwin R. Williams, Metrologia 43 (2006) 227-246

22) The Current SI Seen From the Perspective of the Proposed New SI, by Barry N. Taylor, J. Res. Natl. Inst. Stand. Technol. 116, 797-807 (2011)

23) Resolutions adopted by the CGPM at its 25th meeting (18-20 November 2014)

Résolutions adoptées par la CGPM lors de sa 25e réunion (18-20 novembre 2014)