

Δίσκος του Euler

Το παιχνίδι αυτό περιλαμβάνει ένα ατσάλινο δίσκο κατάλληλου πάχους και διαμέτρου καθώς και ένα κοίλο κάτοπτρο που χρησιμοποιείται ως βάση. Ο δίσκος είναι γνωστός για την πολύ γρήγορη αύξηση του ρυθμού περιστροφής του, καθώς η μηχανική του ενέργεια μειώνεται πολύ αργά λόγω τριβών. Ονομάζεται δίσκος του Euler προς τιμή του Leonhard Euler που μελέτησε την κίνηση του δίσκου τον 18^ο αιώνα. Ο δίσκος όταν ιδιοπεριστρέφεται στην κατοπτρική επιφάνεια εκτελεί μία σύνθετη κίνηση που αποτελείται από μία ιδιοπεριστροφική και μία κύλιση όπου το σημείο επαφής του δίσκου με την κατοπτρική επιφάνεια, διαγράφει κυκλική περιφέρεια, και προοδευτικά επιταχύνεται έως ότου ο δίσκος να ακινητοποιηθεί. Αξιοσημείωτη είναι η συνεχής μετάπτωση του άξονα συμμετρίας του δίσκου η οποία κατά την κίνηση του βαίνει επιταχυνόμενη. Παράλληλα η κατοπτρική βάση εξασφαλίζει πολύ χαμηλή τριβή μεταξύ του δίσκου και της επιφάνειας επαφής και η μικρή καμπυλότητα της αποτρέπει το δίσκο να «αναζητήσει» μία υποστηρικτική επιφάνεια.

Η κίνηση του δίσκου μοιάζει με την περιστροφή ενός κέρματος σε ένα τραπέζι ή ενός οποιουδήποτε δίσκου που περιστρέφεται σε επίπεδη επιφάνεια απλά υπάρχει μεγάλη διαφορά στον χρόνο που απαιτείται για να σταματήσει, καθώς στην περίπτωση του δίσκου λόγω της επιλογής των υλικών, είναι πολύ μεγαλύτερος.

Ο δίσκος τελικά ακινητοποιείται κάτι που συμβαίνει σχετικά απότομα. Το τελικό στάδιο της κίνησης συνοδεύεται από την εκπομπή ήχου του οποίου η συχνότητα αυξάνεται πολύ γρήγορα.

Καθώς η περιφέρεια του δίσκου κυλίνεται, το σημείο επαφής του δίσκου με το κάτοπτρο διαγράφει κύκλο και ταλαντώνεται με μία κυκλική συχνότητα ω . Αν το κάτοπτρο ήταν εντελώς λείο το ω θα ήταν σταθερό και η κίνηση του δίσκου θα συνεχιζόταν για πάντα. Στην πραγματική κίνηση του δίσκου όμως όπως περιέγραψε ο Euler ο ρυθμός μετάπτωσης του άξονα συμμετρίας προσεγγίζει μία πεπερασμένου χρόνου μοναδικότητα που περιγράφεται από έναν προσεγγιστικό εκθετικό νόμο με εκθέτη το $(-1/3)$ και διαφοροποιείται λίγο ανάλογα με τις συνθήκες του πειράματος.

Διατήρηση της ενέργειας

Όταν ο δίσκος του Euler ιδιοπεριστρέφεται περικλείει κινητική ενέργεια και δυναμική ενέργεια ως προς την επιφάνεια την οποία εφάπτεται, αφού το κέντρο μάζας του βρίσκεται υψηλότερα από αυτήν. Η αρχική μηχανική ενέργεια προσφέρεται εξωτερικά από αυτόν που θέτει τον δίσκο σε κίνηση. Το φαινόμενο είναι πιο εντυπωσιακό αν αρχικά το επίπεδο του δίσκου είναι κάθετο στην βάση επαφής και αν η βάση είναι κοίλο κάτοπτρο έτσι ώστε να περιορίζεται η απώλεια μηχανικής ενέργειας λόγω τριβής. Είναι προφανές ότι αν δεν υπήρχαν καθόλου τριβές ο δίσκος θα κυλούσε και θα περιστρεφόταν συνέχεια.

Στην κίνηση του δίσκου υπάρχουν δύο προφανείς αιτίες απώλειας ενέργειας:

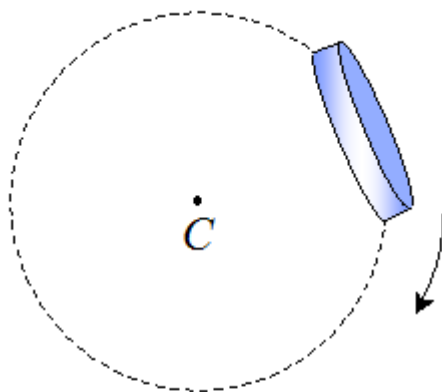
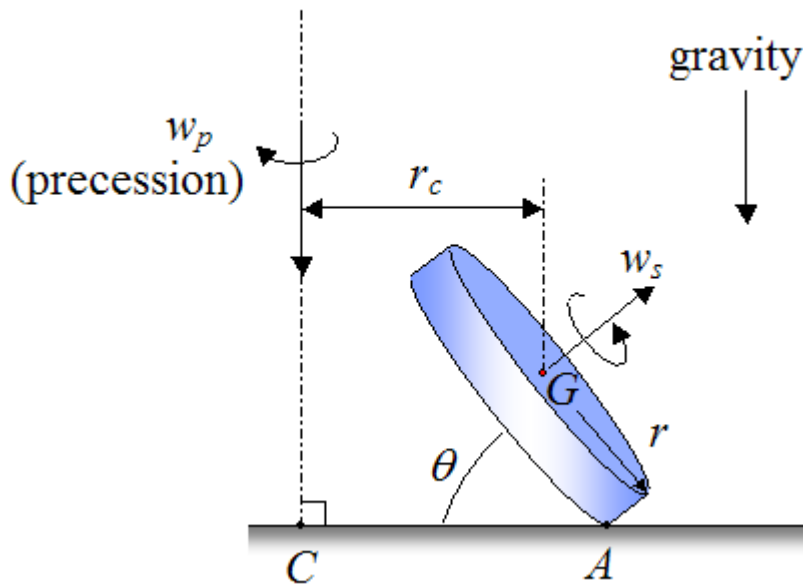
- **Η τριβή κύλισης** (παρατηρείται σε πραγματικά στερεά, όπου η παραμόρφωση αυτών δεν μπορεί να αγνοηθεί)
- **Η αντίσταση του αέρα**

Ακριβή πειράματα έδειξαν ότι η τριβή κύλισης είναι κυρίως υπεύθυνη τόσο για την απώλεια ενέργειας, όσο και για το είδος της κίνησης. Το συμπέρασμα προέκυψε από πειράματα που

πραγματοποιήθηκαν σε κενό.

Τον 21^ο αιώνα, η έρευνα αναζωπυρώθηκε από ένα άρθρο που δημοσιεύτηκε στο περιοδικό Nature από τον Keith Moffatt στις 20 Απριλίου του 2000.

Σύντομη μαθηματική ανάλυση



View from top

The dashed line represents the circular path traveled by point A

Όπου,

ω_s , είναι η γωνιακή ταχύτητα του δίσκου ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του

και είναι κάθετος στο επίπεδο του,

w_p , είναι η γωνιακή ταχύτητα του σημείου επαφής του δίσκου με την κατοπτρική βάση που εκτελεί κυκλική κίνηση, το μέτρο της οποίας εξαρτάται από το ρυθμό της μετάπτωσης του άξονα συμμετρίας του δίσκου,

A-είναι το σημείο επαφής του δίσκου με την κατοπτρική βάση,

C-είναι το σημείο όπου ο άξονας της μετάπτωσης τέμνει την κατοπτρική επιφάνεια,

r_c , είναι η οριζόντια απόσταση μεταξύ του άξονα της μετάπτωσης και του κέντρου μάζας G του δίσκου το οποίο ταυτίζεται με το γεωμετρικό του κέντρο.

r-είναι η ακτίνα του δίσκου,

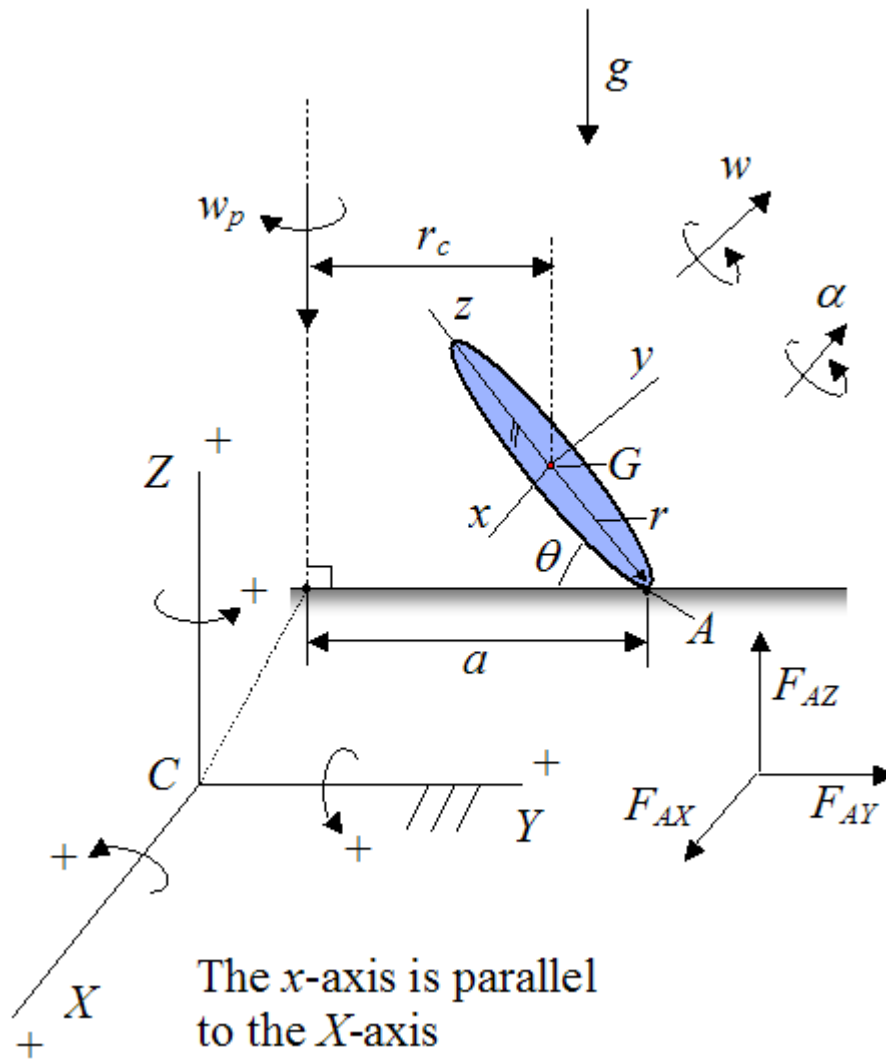
θ -είναι η γωνία που σχηματίζει ο δίσκος με τον ορίζοντα,

Ας επιχειρηθεί μία απλουστευμένη εξήγηση της Φυσικής του φαινομένου, όπου τα w_s , w_p και θ θεωρούνται σταθερά, ενώ στην πραγματική κίνηση είναι προφανές ότι οι γωνιακές ταχύτητες αυξάνονται κατά μέτρο ενώ η γωνία μειώνεται.

Περαιτέρω απλουστεύσεις περικλείουν:

- Ο δίσκος κυλά χωρίς να ολισθαίνει,
- Το πάχος του δίσκου είναι μικρό σε σύγκριση με την ακτίνα του
- Ο δίσκος κινείται με τέτοιο τρόπο ώστε $r_c = 0$. Στην πραγματικότητα αυτή είναι μία πολύ καλή προσέγγιση όταν η γωνία θ μικραίνει πολύ. Για μικρές γωνίες θ λοιπόν, η διάμετρος της κυκλικής τροχιάς που διαγράφει το A και φαίνεται στο σχήμα με διακεκομμένες γραμμές, προσεγγίζει τη διάμετρο του δίσκου.

Λαμβάνοντας υπόψη τις παραπάνω θεωρήσεις το προηγούμενο σχήμα μετασχηματίζεται στο παρακάτω, όπου ο δίσκος έχει τόσο λεπτό πάχος που μπορεί να θεωρηθεί δισδιάστατος :



Για τη μελέτη της κίνησης θεωρούμε δύο συστήματα αναφοράς :

- Ένα τρισσορθογώνιο σύστημα αναφοράς (X, Y, Z) με αρχή το σημείο C και ακίνητο ως προς τη $\Gamma\eta$,
- Ένα τρισσορθογώνιο σύστημα αναφοράς (x, y, z) με αρχή το σημείο G (κέντρο μάζας του δίσκου) προσαρμοσμένο πάνω στο δίσκο,
- Οι άξονες x και X των δύο συστημάτων αναφοράς είναι παράλληλοι μεταξύ τους.

Στο σχήμα περιγράφονται επίσης τα φυσικά μεγέθη :

- g -η επιτάχυνση της βαρύτητας
- w -η γωνιακή ταχύτητα του δίσκου ως προς τη $\Gamma\eta$
- α -η γωνιακή επιτάχυνση του δίσκου ως προς τη $\Gamma\eta$
- a -η απόσταση (AC)
- F_{AX} , είναι η δύναμη που ασκείται στον άξονα- X , στο σημείο A
- F_{AY} , είναι η δύναμη που ασκείται στον άξονα- Y , στο σημείο A
- F_{AZ} , είναι η δύναμη που ασκείται στον άξονα- Z , στο σημείο A

Στην συνέχεια εφαρμόζοντας τις εξισώσεις κίνησης για στερεό σώμα του Euler, και τους νόμους του Newton καταλήγουμε στην παρακάτω σχέση, που συνδέει τη γωνιακή

ταχύτητα του σημείου επαφής του δίσκου με την κατοπτρική βάση w_p και τη γωνία θ .

$$w_p = \sqrt{\frac{4g}{r \sin \theta}}$$

Συμπεράσματα

Όπως φαίνεται από την τελευταία μαθηματική σχέση όταν η γωνία θ τείνει στο 0, η γωνιακή ταχύτητα w_p τείνει στο άπειρο. Το μαθηματικό συμπέρασμα είναι συνεπές με το φαινόμενο και συγκεκριμένα με την πολύ γρήγορη αύξηση του μέτρου της ταχύτητας του δίσκου που παρατηρείται όταν η γωνία γίνεται πολύ μικρή.

Επίσης στο πραγματικό φαινόμενο υπάρχει τριβή ολίσθησης που ασκείται στο σημείο A κάτι που επηρεάζει την παραπάνω λύση που είναι ιδανική.

Καθώς ο δίσκος μειώνει τη μηχανική του ενέργεια λόγω τριβών, μειώνει παράλληλα και την βαρυτική του δυναμική ενέργεια ως προς το επίπεδο της κατοπτρικής βάσης, καθώς το κέντρο μάζας G προοδευτικά χαμηλώνει με αποτέλεσμα η γωνία θ να γίνεται συνεχώς μικρότερη. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα, σύμφωνα με την τελική εξίσωση, να αυξάνεται ο ρυθμός μετάπτωσης του άξονα συμμετρίας του δίσκου. Αυτή η αύξηση συνεχίζεται μέχρι η γωνία να γίνει τόσο μικρή, οπότε ο δίσκος θα προσκρούσει στη βάση.

Στην παραπάνω ανάλυση η τριβή θεωρήθηκε αμελητέα. Η κίνηση του δίσκου δεν θα μπορούσε να αναλυθεί θεωρώντας, ότι η στροφορμή της διατηρείται, αφού η ροπή της δύναμης F_{AZ} που ασκείται στο σημείο A ως προς το κέντρο μάζας G, δεν μπορεί σε καμία περίπτωση να αγνοηθεί ή να θεωρηθεί αμελητέα.

Τέλος αξίζει να αναφερθεί ότι η ανάλυση της κίνησης του δίσκου του Euler παρουσιάζει πολλές ομοιότητες με την κίνηση του γυροσκοπίου.

Βιβλιογραφία

1. **Jump up**[^] "Publications". eulersdisk.com.
2. **Jump up**[^] Easwar, K.; Rouyer, F.; Menon, N. (2002). "Speeding to a stop: The finite-time singularity of a spinning disk". *Physical Review E* **66** (4). [Bibcode:2002PhRvE..66d5102E](#). [doi:10.1103/PhysRevE.66.045102](#). [edit](#)
3. **Jump up**[^] Moffatt, H. K. (20 April 2000). "Euler's disk and its finite-time singularity". *Nature* **404** (6780): 833–834. [doi:10.1038/35009017](#). [PMID 10786779](#).
4. **Jump up**[^] Van den Engh, Ger; Nelson, Peter; Roach, Jared (30 November 2000). "Analytical dynamics: Numismatic gyrations". *Nature* **408**(6812): 540. [doi:10.1038/35046209](#).
5. **Jump up**[^] Moffatt, H. K. (30 November 2000). "Reply: Numismatic gyrations". *Nature* **408** (6812): 540. [doi:10.1038/35046211](#).
6. **Jump up**[^] Petrie, D.; Hunt, J. L.; Gray, C. G. (2002). "Does the Euler Disk slip during its motion?". *American Journal of Physics* **70** (10): 1025–1028. [Bibcode:2002AmJPh..70.1025P](#). [doi:10.1119/1.1501117](#).