

ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ.....ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ.....

Πειραματική μελέτη των μακροσκοπικών μεταβλητών που καθορίζουν τη συμπεριφορά των αερίων και οικοδόμηση εννοιών που σχετίζονται με το νόμο που τα διέπει (καταστατική εξίσωση)

Πριν προχωρήσετε στις δραστηριότητες, διαβάστε προσεκτικά τις οδηγίες που σας δόθηκαν για τη συσκευή του νόμου των αερίων, συναρμολογήστε τη και εξοικιωθείτε με τη λειτουργία των στρόφιγγών κάνοντας δοκιμές.

Δραστηριότητα 1

Το ξέρετε ότι.. Είναι χαρακτηριστικό ότι τόσο ο Ιρλανδός Boyle (μελέτησε τα αέρια και οδηγήθηκε στο νόμο το 1662) όσο και ο Γάλλος Ιερέας Mariotte (μελέτησε τα αέρια χωρίς να γνωρίζει τα πειράματα του Boyle και οδηγήθηκε στο νόμο το 1674) πειραματίζονται μόνο με ΑΕΡΑ. Η σημαντική ιδέα ότι, εκτός από τον αέρα «υπάρχουν και άλλα ΑΕΡΙΑ σώματα» έκανε την εμφάνισή της ένα περίπου αιώνα αργότερα! Την εποχή που πειραματίζονται οι δύο επιστήμονες ΔΕΝ έχει ανακαλυφθεί το θερμόμετρο! Τα πειράματα τους οδήγησαν στο συμπέρασμα ότι για τον αέρα:

$$PV = \text{σταθερό (1)},$$

Όπου P, η πίεση του αέρα στο εσωτερικό κλειστού δοχείου και V ο όγκος που καταλαμβάνει το αέριο.

Προκειμένου να επαληθεύσετε τη σχέση (1) της πίεσης, με τον όγκο για το δοχείο με αέρα που έχετε στον πάγκο σας, εργαστείτε ομαδικά πραγματοποιώντας την παρακάτω διαδικασία:

- Αρχικά ρυθμίζετε τις στρόφιγγες με τέτοιο τρόπο, ώστε να επιτρέπεται η είσοδος αέρα στον θάλαμο.
- Πιέζετε προς τα κάτω τον μοχλό απελευθέρωσης που υπάρχει στον μεταλλικό κύλινδρο και τραβάτε προς τα πάνω το στέλεχος.
- Ανεβάζετε το στέλεχος μέχρι τον όγκο 300 ml (το στέλεχος έχει μια κόκκινη χαραγή που μας δείχνει σε σύγκριση με την κλίμακα από πίσω σε ποιόν όγκο έχει φτάσει).
- Κατόπιν γυρίζετε τις στρόφιγγες έτσι ώστε να μην εισέρχεται αέρας στον θάλαμο, αλλά αυτός να επικοινωνεί μόνο με το μανόμετρο.
- Πιέστε τη χειρολαβή και κατεβαίνοντας κάθε 20 ml σημειώνετε την ένδειξη του μανόμετρου. Τη διαδικασία την ολοκληρώνουμε όταν φτάσουμε στα 160 ml. Σε περίπτωση που η πίεση μειώνεται χωρίς να μεταβάλλουμε τον όγκο καλό θα είναι να στρίβουμε λίγο την κάτω στρόφιγγα ώστε να μην επικοινωνεί το μανόμετρο με τον θάλαμο και να παραμένει σταθερή η ένδειξή του.
- Επαναφέρουμε στην αρχική θέση και πιέζουμε τη χειρολαβή αλλάζοντας τον όγκο.
- Το ψηφιακό θερμόμετρο καταγράφει την θερμοκρασία την οποία πρέπει να μετατρέψετε σε Kelvin και να την καταγράψετε στην τρίτη στήλη του πίνακα.

Συμπληρώστε τον παρακάτω πίνακα με τις μετρήσεις σας:

V(ml)

P (bar)

T=

300

280

260

240

220

200

180

160

Ρίχνοντας μία γρήγορη ματιά στον πίνακα των μετρήσεων σας και συζητώντας με τα μέλη της ομάδας σας, συμπληρώστε τα κενά:

- Στο πείραμα που πραγματοποιήσαμε όσο ο όγκος, η πίεσηκαι η θερμοκρασία.....
- Προβλέψτε τη μαθηματική σχέση μεταξύ των μεγεθών της πίεσης και του όγκου

α. Γραμμική ($P=\alpha V+\beta$)β. Παραβολική ($P=\alpha V^2$)γ. Υπερβολική $P=\alpha/V$

Δραστηριότητα 2

Προκειμένου να διερευνήσετε τη σχέση της πίεσης, με την απόλυτη θερμοκρασία του αερίου που περιέχετε στο κυλινδρικό μεταλλικό δοχείο που έχετε στον πάγκο σας, εργαστείτε ομαδικά πραγματοποιώντας την παρακάτω πειραματική διαδικασία:

- Ρυθμίζουμε τις στρόφιγγες με τέτοιον τρόπο, ώστε να επιτρέπεται η είσοδος αέρα στον θάλαμο
- Πιέζουμε προς τα κάτω τον μοχλό απελευθέρωσης που υπάρχει στον μεταλλικό κύλινδρο και τραβάμε προς τα πάνω το στέλεχος. Ανεβάζουμε το στέλεχος μέχρι τον όγκο 200 ml (το στέλεχος έχει μια κόκκινη χαραγή που μας δείχνει σε σύγκριση με την κλίμακα από πίσω σε ποιόν όγκο έχει φτάσει).
- Κατόπιν γυρίζουμε τις στρόφιγγες έτσι ώστε να μην εισέρχεται αέρας στον θάλαμο, αλλά αυτός να επικοινωνεί μόνο με το μανόμετρο.
- Πιέζουμε τη χειρολαβή μέχρι η ένδειξη του μανομέτρου να γίνει 0,5 bar. Κατόπιν γεμίζουμε τον πλαστικό κύλινδρο με ζεστό νερό.
- Περιμένουμε να σταθεροποιηθεί η θερμοκρασία και καταγράφουμε τη νέα ένδειξη του μανομέτρου
- Στη συνέχεια αδειάζουμε λίγο από το ζεστό νερό (ανοίγοντας τη στρόφιγγα που βρίσκεται στο κάτω μέρος του πλαστικού κυλίνδρου) και συμπληρώνουμε με κρύο νερό. Περιμένουμε πάλι να σταθεροποιηθεί η θερμοκρασία. Στη διαδικασία που προηγήθηκε ο όγκος παρέμεινε σταθερός
- Επαναλαμβάνουμε μερικές φορές ακόμα και συμπληρώνουμε τον πίνακα που ακολουθεί:

P (bar)

T (K)=

V(ml)

$$273 + \theta^{\circ} \text{C}$$

Ρίχνοντας μία γρήγορη ματιά στον πίνακα των μετρήσεων σας και συζητώντας με τα μέλη της ομάδας σας, συμπληρώστε τα κενά:

1. Στο πείραμα που πραγματοποιήσαμε όσο η θερμοκρασία, η πίεσηκαι ο όγκος.....
2. Προβλέψτε τη μαθηματική σχέση μεταξύ των μεγεθών της πίεσης και της θερμοκρασίας

α. Γραμμική ($P=\alpha T+\beta$)

β. Παραβολική ($P=\alpha T^2$)

γ. Υπερβολική $P=\alpha/T$

Το ξέρετε ότι.. Τον νόμο που μόλις μελετήσατε, μελέτησαν πρώτοι τη δεκαετία του 1780, παραμονές της Γαλλικής Επανάστασης, οι Γάλλοι ερευνητές διαθέτοντας ΘΕΡΜΟΜΕΤΡΟ και ΜΑΝΟΜΕΤΡΟ αλλά και την πεποίθηση ότι «εκτός από τον αέρα υπάρχουν πολλών μορφών διαφορετικά ΑΕΡΙΑ». Χρησιμοποιώντας θερμόμετρο, μανόμετρο και ογκομετρικές διατάξεις ο Jacques Charles το 1787, δυο χρόνια πριν ξεσπάσει η Επανάσταση - αφού είχε ήδη κατασκευάσει αερόστατο με υδρογόνο - ερευνά τη συμπεριφορά του αέρα κατά τη θέρμανσή του και συγκεκριμένα το φαινόμενο ισοβαρής θέρμανση του αέρα το οποίο αναφέρεται και ως διαστολή του αέρα υπό σταθερή πίεση. Οι μετρήσεις είχαν οδηγήσει σε συμπεράσματα για μια αναλογία ανάμεσα στην αύξηση της θερμοκρασίας και στην αντίστοιχη αύξηση του όγκου τα οποία μπορούν να περιγραφούν με την μαθηματική εξίσωση

$\Delta V = V_0 \alpha \Delta \theta$ με $\alpha = 1/273$ ανά βαθμό. Επανάλαβε τις πειραματικές μετρήσεις και με άλλα αέρια που δεν ήταν αέρας για να διαπιστώσει το, ιδιαίτερα εντυπωσιακό ότι η περίπου - κατά $1/273$ ΑΥΞΗΣΗ του όγκου του αέρα φαινόταν να ισχύει για οποιαδήποτε αέριο!!.

Έτσι 60 περίπου χρόνια αργότερα, το 1848, ο Άγγλος λόρδος Κέλβιν - βασιζόμενος στον συντελεστή $\alpha = 1/273 \text{ grad}^{-1}$ - πρότεινε την λεγόμενη «απόλυτη κλίμακα» θερμοκρασίας. Με βάση την πρόταση του Kelvin ο νόμος μετασχηματίζεται σε:

$$P/T = \text{σταθερό}$$

Δραστηριότητα 3

Και τώρα προχωρήστε στον έλεγχο του τρίτου συνδυασμού των μεγεθών. Προσπαθήστε με το τρίτο πείραμα να συσχετίσετε τον όγκο που καταλαμβάνει ο αέρας στο δοχείο, με την απόλυτη θερμοκρασία. Εργαστείτε και σε αυτή τη δραστηριότητα ομαδικά πραγματοποιώντας την παρακάτω πειραματική διαδικασία:

2 Πρότυπο Πειραματικό Λύκειο Αθηνών

- Αρχικά ρυθμίζουμε τις στρόφιγγες με τέτοιον τρόπο, ώστε να επιτρέπεται η είσοδος αέρα στον θάλαμο.
- Πιέζουμε προς τα κάτω τον μοχλό απελευθέρωσης που υπάρχει στον μεταλλικό κύλινδρο και τραβάμε προς τα πάνω το στέλεχος. Ανεβάζουμε το στέλεχος μέχρι τον όγκο 200 ml
- Κατόπιν γυρίζουμε τις στρόφιγγες έτσι ώστε να μην εισέρχεται αέρας στον θάλαμο, αλλά αυτός να επικοινωνεί μόνο με το μανόμετρο.
- Πιέζουμε τη χειρολαβή μέχρι η ένδειξη του μανομέτρου να γίνει 0,7 bar. Κατόπιν γεμίζουμε τον πλαστικό κύλινδρο με ζεστό νερό. Περιμένουμε να σταθεροποιηθεί η θερμοκρασία και καταγράφουμε τη νέα ένδειξη του μανομέτρου
- Στη συνέχεια αδειάζουμε λίγο από το ζεστό νερό (ανοίγοντας τη στρόφιγγα που βρίσκεται στο κάτω μέρος του πλαστικού κυλίνδρου) και συμπληρώνουμε με κρύο νερό. Περιμένουμε πάλι να σταθεροποιηθεί η θερμοκρασία.
- Κατά την προσθήκη κρύου νερού όμως η πίεση μειώνεται. Κάθε φορά λοιπόν πιέζουμε τη χειρολαβή έτσι ώστε να μειωθεί ο όγκος και να αυξάνεται η πίεση μέχρι την προηγούμενη τιμή της, διατηρώντας την έτσι σταθερή. Διατηρώντας λοιπόν σταθερή την πίεση καταγράφουμε τις τιμές του όγκου και της θερμοκρασίας κάθε φορά.
- Ακολουθούμε την ίδια διαδικασία μερικές φορές ακόμα και συμπληρώνουμε τον πίνακα που ακολουθεί (τουλάχιστον 6 μετρήσεις) :

V(ml)

T (K)=

P (bar) =σταθερός

273 + θ° C

Ρίχνοντας μία γρήγορη ματιά στον πίνακα των μετρήσεων σας και συζητώντας με τα μέλη της ομάδας σας:

1. Συμπληρώστε τα κενά: Στο πείραμα που πραγματοποιήσαμε όσο η θερμοκρασία, ο όγκος.....και η πίεση.....
2. Προβλέψτε τη μαθηματική σχέση μεταξύ των μεγεθών της πίεσης και της θερμοκρασίας

α. Γραμμική ($V=\alpha T+\beta$)

β. Παραβολική ($V=\alpha T^2$)

γ. Υπερβολική $V=\alpha/T$

Το ξέρετε ότι.. Τον νόμο που μόλις μελετήσατε, μελέτησε δώδεκα χρόνια μετά τον Charles και ενώ η Γαλλία είναι «Γαλλία του Ναπολέοντα», ένας νεαρός Γάλλος χημικός κάνοντας παρόμοιες μετρήσεις με μεγαλύτερη ακρίβεια και σε περισσότερα αέρια. Με τον Berthollet και τον Laplace, να τον ενθαρρύνουν, ο νεαρός μόλις 23 ετών, κάνει την ακριβέστερη μέχρι τότε έρευνα στην ΙΣΟΒΑΡΗ θέρμανση και τη συνεπαγόμενη ΔΙΑΣΤΟΛΗ των αερίων και στην ισόχωρη θέρμανσή τους. το χειμώνα του 1802, στο Παρίσι ο Joseph Louis Gay Lussac – Ζοζέφ λουί Γκε Λυσάκ - θα δημοσιεύσει την εργασία του αλλά και θα ομολογήσει γραπτώς ότι πριν δεκαπέντε χρόνια, παραμονές της Γαλλικής Επανάστασης ο Jacques Charles είχε οδηγηθεί στα ίδια ακριβώς συμπεράσματα αλλά δεν τα δημοσίευσε ποτέ.

Ισοβαρής μεταβολή – Νόμος Gay – Lussac
 $V/T = \text{σταθερό, για } P=\text{σταθερό}$

2 διδακτική ώρα **Επεξεργασία Μετρήσεων (Πραγματοποιήθηκε στην αίθουσα πολυμέσων του σχολείου)**

Δραστηριότητα 4

- Ανοίξτε το αρχείο Excel με όνομα «Νόμοι αερίων» που υπάρχει στην επιφάνεια εργασίας του υπολογιστή σας
- Συμπληρώστε τις στήλες με τις μετρήσεις που πήρατε στο εργαστήριο στα κατάλληλα φύλλα. Στο φύλλο με το όνομα Boyle συμπληρώστε τις τιμές της δραστηριότητας 1, στο φύλλο με το όνομα Charles συμπληρώστε τις τιμές της δραστηριότητας 2, ενώ στο φύλλο 3 με το όνομα Gay-Lussac συμπληρώστε τις τιμές της δραστηριότητας 3.

Παρατήρηση

Το μανόμετρο που χρησιμοποιήσατε μετρά υπερπίεση, δηλαδή την διαφορά πιέσεων στο εσωτερικό του κυλινδρικού δοχείου και της πίεσης της ατμόσφαιρας (εξωτερική πίεση). Για να υπολογίσουμε λοιπόν την συνολική πίεση του αερίου (P_{tot}) πρέπει να προσθέσουμε στην ένδειξη του μανομέτρου την τιμή της ατμοσφαιρικής πίεσης. Αυτό γίνεται εφαρμόζοντας την κατάλληλη συνάρτηση χρησιμοποιώντας τις τιμές των κελιών C3, C4. Έτσι συμπληρώνουμε την στήλη με τις τιμές της συνολικής πίεσης (P_{tot}) και στα τρία φύλλα.

- Στο φύλλο με το όνομα Boyle υπολογίζετε τις τιμές $1/V$ κάνοντας χρήση κατάλληλης συνάρτησης.
- Τώρα ανοίξτε το αρχείο του λογισμικού LoggerPro όνομα «Νόμοι αερίων» που υπάρχει στην επιφάνεια εργασίας του υπολογιστή σας
- Αντιγράψτε τις στήλες P_{tot} , $V(\text{m}^3)$, $1/V$ από το φύλλο Excel με το όνομα Boyle στις στήλες με τα αντίστοιχα ονόματα του LoggerPro.

Παρατηρήστε την γραφική παράσταση $P=f(V)$. Η γραφική παράσταση που συσχετίζει τα μακροσκοπικά μεγέθη της πίεσης και του όγκου του αερίου είναι.....

Η μαθηματική σχέση μεταξύ των μεγεθών της πίεσης και του όγκου

α. Γραμμική ($P=\alpha V+\beta$)

β. Παραβολική ($P=\alpha V^2$)

γ. Υπερβολική $P=\alpha/V$

Στη συνέχεια παρατηρήστε την γραφική παράσταση $P=f(1/V)$.

Η γραφική παράσταση που συσχετίζει τα μεγέθη της πίεσης και του αντίστροφου του όγκου του αερίου ($1/V$)

είναι.....

Προκειμένου να χαράξετε την καλύτερη πειραματική ευθεία (best fit line) με τη βοήθεια του λογισμικού

επιλέξτε διαδοχικά τις εντολές:

- Επιλέξτε Analyze → Curve Fit → Linear (mx+B) → Try fit

Στην οθόνη σας εμφανίζεται η κλίση της ευθείας k (slope) και η τομή με τον άξονα των πιέσεων B (Y-intercept). Η πειραματική σας ευθεία πήρε την τελική της μορφή και ακολουθεί τη συνάρτηση:

$$P = k \frac{1}{V} + B,$$

Χρησιμοποιώντας την πειραματική σας ευθεία και συζητώντας με τα μέλη της ομάδας σας,

- Υπολογίστε την πίεση του αερίου όταν ο όγκος του ήταν 185ml
- Υπολογίστε τον όγκο του αερίου όταν η ένδειξη του μανομέτρου είναι 0,6 bar
- Γράψτε μία παράγραφο για τη σταθερά B .

Δραστηριότητα 5

Με τις πειραματικές μετρήσεις που έχετε ήδη πραγματοποιήσει μπορείτε εύκολα να εκτιμήσετε τον αριθμό των moles αέρα που περιέχονται μέσα στο δοχείο σε κάθε ένα από τα τρία πειράματα.

Το ξέρετε ότι.. Το 1811 ο Amedeo Avogadro έκανε την υπόθεση (Υπόθεση Avogadro) ότι «ίσοι όγκοι αερίου, στις ίδιες συνθήκες p, T , έχουν τον ίδιο αριθμό moles». Η ιδέα του οδήγησε στη διαπίστωση ότι «σε κανονικές συνθήκες - $p = 1 \text{ atm}$, $T = 273 \text{ K}$ - το ένα mole οποιουδήποτε αερίου είχε όγκο 22,4 λίτρα. Το 1834, ο Γάλλος μηχανικός Émile Clapeyron θα συνδυάσει τους τρεις νόμους των αερίων με την Υπόθεση Avogadro και θα προτείνει την ΚΑΤΑΣΤΑΤΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ. Το 1848, ο Άγγλος William Thomson, τότε 24 ετών, δημοσιεύει το *On an Absolute Thermometric Scale* στο οποίο προτείνει τη λεγόμενη απόλυτη κλίμακα θερμοκρασιών με το απόλυτο μηδέν. Το απόλυτο μηδέν της κλίμακας θα συνδεθεί τόσο με τις θεωρίες Μικρόκοσμου – Κινητική Θεωρία των Αερίων – όσο και με την πειραματική έρευνα. Με βάση την απόλυτη κλίμακα, η Καταστατική εξίσωση των ιδανικών αερίων πήρε την τελική της μορφή

$$PV = nRT$$

Μερικές δεκαετίες αργότερα, ο William Thomson θα λέγεται και λόρδος Kelvin και η κλίμακα θα χαρακτηρίζεται κλίμακα Κέλβιν.

- Γυρίστε στα φύλλα Excel και συμπληρώστε τις στήλες PV/T , nR , T χρησιμοποιώντας τις κατάλληλες συναρτήσεις.
- Πηγαίνατε στο κελλί K20 και υπολογίστε την μέση τιμή για τον αριθμό των moles του αέρα και στα τρία φύλλα.

Βιβλιογραφία

1. ΕΚΦΕ Ευρυτανίας, Νόμοι Αερίων, Χρήστος Γεωργίου
2. Pedagogical Content Knowledge and the Gas Laws: A Multiple Case Study, Mary Elizabeth Sande Fred Finley and Gillian H. Roehrig, UNIVERSITY OF MINNESOTA
3. Θερμικές μηχανές, Κορωνάκη Ειρήνη, Λέκτορας ΕΜΠ
4. <http://users.sch.gr/kassetas/education.htm>
5. <http://ocw.mit.edu/courses/physics/8-01-physics-i-classical-mechanics-fall-1999/video-lectures/lecture-33/>
6. Χαλκιά, Κ., (2010) *Διδάσκοντας Φυσικές Επιστήμες*. Εκδ. Πατάκη, Αθήνα

Υλικοτεχνική Υποδομή

Για τα πειράματα

- 1) Μεταλλικός θάλαμος κυλινδρικού σχήματος. Ο όγκος του είναι 300 ml και μέσα του εγκλωβίζεται ο αέρας.
- 2) Μανόμετρο με κλίμακα από 0 – 2,5 bar. Στο μανόμετρο προσαρμόζεται ένας σωλήνας που καταλήγει σε στρόφιγγα τριών εισόδων.
- 3) Ψηφιακό πολύμετρο με δυνατότητα μέτρησης θερμοκρασίας.
- 4) Κλίμακα όγκου σε μορφή «χάρακα».
- 5) Σύριγγα 20 ml.
- 6) Δοχείο κυλινδρικού σχήματος στο οποίο τοποθετείται ο μεταλλικός θάλαμος. Στο δοχείο υπάρχει ένα στόμιο στο πάνω μέρος του και ένας σωλήνας στο κάτω μέρος του, ώστε να προσθέτουμε ζεστό νερό από πάνω όταν επιθυμούμε και να αδειάζουμε μέσω του κάτω σωλήνα.

Για την επεξεργασία δεδομένων-Λογισμικά

- 1) Microsoft Excel
- 2) Logger pro plus

ΦΥΛΛΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ

Δραστηριότητα 6 (Για το σπίτι)

A. «Διαδώστε αυτά που μάθατε/Αναζητήστε που εφαρμόζονται οι νόμοι των αερίων»

Χρησιμοποιώντας τους νόμους των αερίων και τους συνδυασμούς τους, η τεχνολογική εξέλιξη οδήγησε στην κατασκευή θερμικών μηχανών.

Γράψτε μία δισέλιδη αναφορά που να συσχετίζει με συγκεκριμένο τρόπο κάποιον/ κάποιους από τους νόμους που μελετήσατε σήμερα με το περιεχόμενο του παρακάτω πλαισίου.



Νέοι τύποι θερμικών μηχανών: Όπως μηχανές Stirling οι οποίες χρησιμοποιούν εναλλακτικές πηγές ενέργειας όπως βιομάζα, απορριπτόμενη θερμότητα, ηλιακή ενέργεια.

Νέες ενεργειακές πηγές: Οι περισσότερες θερμικές μηχανές χρησιμοποιούν σήμερα την καύση των ορυκτών καυσίμων. Ωστόσο, οι θερμικές μηχανές μπορούν θεωρητικά να λειτουργήσουν με οποιαδήποτε πηγή θερμικής ενέργειας

Νέες εφαρμογές: Η πλειονότητα των αεριοστροβίλων είναι σχετικά μεγάλοι και με αποκλειστική χρήση σε αεροσκάφη ή σε κεντρικούς σταθμούς παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας. Ωστόσο οι μικροί αεριοστροβίλοι αναπτύσσονται για διασκορπισμένη ηλεκτρική παραγωγή και είναι σχετικά μικροί για να τοποθετηθούν σε σπίτια.

B. Γράψτε μιά επιστημονική αναφορά (Scientific report)

Χρησιμοποιώντας μία από τις δραστηριότητες 2 ή 3 γράψτε μία αναφορά με τις εξής παραγράφους 1. Υπόθεση 2.Πειραματική διάταξη 3.Πειραματική διαδικασία 4.Μετρήσεις 5.Επεξεργασία μετρήσεων 6. Συμπεράσματα-Συζήτηση

Η αναφορά σας να μην ξεπερνά τις 4 σελίδες μαζί με τους πίνακες και την γραφική παράσταση.