ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 4

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΠΕΡΙ ΣΦΑΛΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΣΗΜΑΝΤΙΚΩΝ ΨΗΦΙΩΝ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η πειραματική φυσική ασχολείται κυρίως με τον ποσοτικό προσδιορισμό φυσικών μεγεθών. Μερικά πειράματα σχεδιάζονται για να επιβεβαιώσουν γνωστούς νόμους και άλλα για να καθορίσουν εμπειρικές σχέσεις μεταξύ δύο ή περισσότερων μεγεθών. Σε κάθε περίπτωση χρειάζεται να μετρηθούν διάφορες φυσικές ποσότητες και με πολύ απλό ή περίπλοκο τρόπο, με χρήση διαφόρων σχέσεων, να προσδιοριστούν άλλες φυσικές ποσότητες. Κάθε μέτρηση και προσδιορισμός διαφόρων μεγεθών έχει πάντα κάποια απροσδιοριστία ή αλλοιώς κάποιο σφάλμα, όπως συνηθίζεται να λέγεται. Τα σφάλματα είναι τόσο μικρότερα όσο καλύτερες είναι οι μετρήσεις και ο προσδιορισμός των μεγεθών. Αυτό εξαρτάται από τα όργανα που χρησιμοποιούνται, από τη διαδικασία και τους ανθρώπους που εκτελούν τη διαδικασία αυτή.Για παράδειγμα η διάμετρος μιας ράβδου μετρήθηκε και βρέθηκε 56,72 mm, όμως πιο σωστός τρόπος γραφής είναι αυτός που δείχνει και το σφάλμα της μέτρησης, $(56{,}72 \pm 0{,}02)$ mm, αυτό θα πει ότι η διάμετρος είναι (περίπου) κάτι μεταξύ 56,70 mm και 56,74 mm. Το 0,02 mm δηλώνει το σφάλμα, δηλαδή την ακρίβεια του προσδιορισμού της διαμέτρου. Υπάρχουν διάφοροι τύποι σφαλμάτων που οφείλονται σε διάφορες αιτίες όπως, στα όργανα των πειραμάτων ή μετρήσεων ή στον πειραματιστή (παρατηρητή). Χωρίζονται ακόμη σε συστηματικά και τυχαία σφάλματα. Η θεωρία των σφαλμάτων είναι εκτεταμένη και πολύπλοκη, αλλά στο παρόν κείμενο θα περιοριστούμε σε μερικούς απλούς κανόνες που σχετίζονται με υπολογισμούς που έχουν να κάνουν με μετρήσεις ή με τη λύση προβλημάτων και ασκήσεων όπου υπάρχουν και αριθμητικά αποτελέσματα.

ΣΗΜΑΝΤΙΚΑ ΨΗΦΙΑ, ΣΤΡΟΓΓΥΛΟΠΟΙΗΣΗ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΩΝ ΤΙΜΩΝ

Σημαντικά ψηφία της αριθμητικής τιμής φυσικού μεγέθους είναι τα ψηφία εκείνα που γνωρίζουμε ότι λίγο πολύ είναι σωστά και συμβατά με την ακρίβεια με την οποία ξέρουμε την τιμή του φυσικού μεγέθους. Το τελευταίο σημαντικό ψηφίο έχει λιγότερη πιθανότητα να είναι σωστό. Σήμερα ειδικά με τη χρήση των ηλεκτρονικών υπολογιστών οι οποίοι μπορούν να δίνουν τα αποτελέσματά τους με πολλά ψηφία, χρειάζεται να καταλάβει κάποιος τη σημασία των αποτελεσμάτων των πράξεων με φυσικά μεγέθη τα οποία έχουν περιορισμένη ακρίβεια στον προσδιορισμό τους. Η διάδοση των σφαλμάτων μέσω διαφόρων σχέσεων και διαδικασιών είναι ολόκληρη επιστήμη και φυσικά δεν θα μας απασχολήσει καθόλου. Θα αρκεστούμε σε απλούς, ικανοποιητικούς κανόνες.

Τα μηδενικά στα αριστερά του μεγαλύτερης τάξης μη μηδενικού ψηφίου δεν υπολογίζονται στην αρίθμηση του πλήθους των σημαντικών ψηφίων.

Τα κατωτέρω παραδείγματα είναι επεξηγηματικά:

1,35	3 σημαντικά ψηφία
0,107	3 σημαντικά ψηφία
0,050 20	4 σημαντικά ψηφία
500	3 σημαντικά ψηφία
500,0	4 σημαντικά ψηφία
50×10^1	2 σημαντικά ψηφία
5×10^2	1 σημαντικό ψηφίο
$1{,}520 \times 10^5$	4 σημαντικά ψηφία
$1{,}7 \times 10^{-4}$	2 σημαντικά ψηφία

Πολλές φορές χρειάζεται να στρογγυλοποιηθεί κάποιος αριθμός, δηλαδή να αντικατασταθεί με τον πλησιέστερό του με πιο ακριβή (λιγότερα) σημαντικά ψηφία. Ας υποθέσουμε ότι ένας αριθμός δικαιολογείται να έχει τρία σημαντικά ψηφία, ενώ από κάποιον υπολογιστή η τιμή του δίνεται ως 0,516 784 252. Ο πλησιέστερος αριθμός με τρία σημαντικά ψηφία είναι ο 0,517, αυτός είναι ο στρογγυλοποιημένος αριθμός. Η στρογγυλοποίηση αυτή είναι στρογγυλοποίηση προς τα άνω, αφού ο τελικός αριθμός είναι μεγαλύτερος του αρχικού.

Αν έχουμε τον 1,723 και πρέπει να στρογγυλοποιηθεί σε δυο σημαντικά ψηφία, τότε καταλήγουμε στον 1,7. Εδώ έχομε στρογγυλοποίηση προς τα κάτω, αφού ο τελευταίος είναι μικρότερος του αρχικού. Αν έχομε τον 1,75 και πρέπει να τον στρογγυλέψουμε σε δύο σημαντικά ψηφία, τότε μπορούμε να τον στρογγυλέψουμε προς τα πάνω και να πάρουμε τον 1,8 (πολλοί προτιμούν αυτή τη λύση), αυτή η μέθοδος εφαρμόζεται στους υπολογιστές. Μια άλλη μέθοδος είναι να κάνομε τη στρογγυλοποίηση στον κοντινότερο αριθμό με το τελευταίο ψηφίο ζυγό. Αυτό βοηθά σε περιπτώσεις όπως, όταν έχομε να επεξεργαστούμε σειρά από πολλά δεδομένα, οπότε η διαδικασία αυτή κάνει μικρότερα τα σφάλματα, στρογγυλοποίησης, διότι (σχεδόν) τα μισά θα είναι προς τα πάνω και τα μισά προς τα κάτω.

Έχομε τότε το 1,75 να γίνεται, με δύο σημαντικά, 1,8 (μεγαλύτερο), ενώ το 2,65 με δύο σημαντικά γίνεται 2,6 (μικρότερο). Η χρήση του επιστημονικού συμβολισμού, σε πολλαπλασιασμό επί δυνάμεις του 10, πολλές φορές επιβάλλεται για αποφυγή ασαφειών. Αν θέλομε να δηλώσουμε ότι ο αριθμός πεντακόσια έχει δύο σημαντικά ψηφία, τότε δεν μπορούμε να γράψομε 500, διότι αυτό θα δήλωνε 3 σημαντικά. Ο αριθμός μπορεί να γραφεί 5×10^1 ή $5,0 \times 10^2$ ή $0,50 \times 10^3$ κ.λπ. Χρειάζεται προσοχή όταν γράφομε μηδενικά στο τέλος του αριθμού, αν δεν είμαστε προσεκτικοί αυτά μπορεί να μην είναι σημαντικά ψηφία.

Πολλές φορές έχομε αριθμούς που είναι γνωστοί με απόλυτη ακρίβεια και όμως δεν τους γράφομε με άπειρα σημαντικά ψηφία. Σε τέτοιες περιπτώσεις δηλώνουμε ότι, ο αριθμός είναι, για παράδειγμα, 2 ακριβώς ή αυτό γίνεται αντιληπτό από τα συμφραζόμενα. Είναι ευνόητο αν λέμε ότι έχομε το διπλάσιο του μήκους, L, και γράφομε $2 \times L$, τότε το 2 είναι γνωστό με απόλυτη ακρίβεια. Επίσης αν γράφομε $\pi \times L$ το π θεωρείται γνωστό με άπειρα σημαντικά.

ΣΗΜΑΝΤΙΚΑ ΨΗΦΙΑ ΚΑΤΑ ΤΟΝ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟ (ΔΙΑίΡΕΣΗ) ΚΑΙ ΠΡΟΣΘΕΣΗ (ΑΦΑΙΡΕΣΗ)

Όταν χρησιμοποιούμε γενικά πολύπλοκες εκφράσεις μεταξύ μεγεθών η επίδραση της ασάφειας στη γνώση των αριθμητικών τιμών διαφόρων μεγεθών έχει προφανώς επίδραση στις υπολογιζόμενες ποσότητες. Η ανάλυση της διάδοσης των σφαλμάτων είναι γενικά πολύπλοκη, αλλά εδώ θα περιοριστούμε σε απλούς κανόνες για πολλαπλασιασμό (και διαίρεση) και για πρόσθεση (και αφαίρεση).

Πολλαπλασιασμός (διαίρεση)

Προσδιορίζομε τα σημαντικά ψηφία του κάθε αριθμού παράγοντα ή διαιρέτη. Κάποιος ή κάποιοι έχουν τον ελάχιστο αριθμό σημαντικών. Το αποτέλεσμα των πράξεων θα έχει αριθμό σημαντικών που δεν μπορεί να είναι μεγαλύτερος από αυτόν τον ελάχιστο αριθμό. Στην πράξη ο αριθμός των σημαντικών λαμβάνεται ίσος με αυτό τον ελάχιστο αριθμό.

Παραδείγματα

$3,25 \times 0,21/0,8 = 0,9$

$0,851 \times 0,80 = 0,68$

$0,075\,2/0,012 = 6,3$

$1,35 \times 10^4 \times 0,73/2 \times 10^2 = 0,5 \times 10^2$

Πρόσθεση (αφαίρεση)

Σε αυτή την περίπτωση αυτό που παίζει ρόλο είναι η τάξη του τελευταίου σημαντικού ψηφίου κάθε αριθμού (ελάχιστη τάξη ψηφίων του αριθμού). Βρίσκομε την ελάχιστη τάξη για κάθε αριθμό και την μέγιστη από αυτές. Το αποτέλεσμα της πράξης δεν μπορεί να έχει ψηφία με μικρότερη τάξη από την μέγιστη αυτή τάξη. Στην πράξη παίρνουμε ψηφία μέχρι τη μέγιστη.

Παραδείγματα

10,00 1 ελάχιστη τάξη 10^{-3} (χιλιοστά)

0,000 3 ελάχιστη τάξη 10^{-4} (δέκατα του χιλιοστού)

0,85 ελάχιστη τάξη 10^{-2} (εκατοστά)

Μέγιστη μεταξύ αυτών είναι η 10^{-2} (εκατοστά)

άρα $10{,}001 + 0{,}0003 - 0{,}85 = 9{,}15$

124 ελάχιστη τάξη 10^{0} (μονάδες)

$5{,}0 \times 10^2$ ελάχιστη τάξη 10^{1} (δεκάδες)

7,8 ελάχιστη τάξη 10^{-1} (δέκατα)

Μέγιστη μεταξύ αυτών είναι η 10^{1} (δεκάδες)

άρα $124 - 5{,}0 \times 10^2 + 7{,}8 = -3{,}7 \times 10^2$

Μερικές φορές είναι βολικό να γράφονται οι αριθμοί με τον επιστημονικό συμβολισμό με ίδιες δυνάμεις (αρνητικές ή θετικές) του 10. Στην τελευταία προηγούμενη περίπτωση θα έχομε,

$1{,}24 \times 10^2$

$5{,}0 \times 10^2$

$0{,}078 \times 10^2$

άρα

$$1{,}24 \times 10^2 - 5{,}0 \times 10^2 + 0{,}078 \times 10^2 = (1{,}24 - 5{,}0 + 0{,}078) \times 10^2 = -3{,}7 \times 10^2$$

αφού στους αριθμούς της παρένθεσης η μέγιστη τάξη τελευταίου σημαντικού ψηφίου είναι τα δέκατα.

Στην πρόσθεση και αφαίρεση δεν ισχύει κανόνας για το πλήθος των σημαντικών ψηφίων, αλλά ο κανόνας αφορά στο τελευταίο σημαντικό ψηφίο του αποτελέσματος των πράξεων.

Για παράδειγμα στο πρώτο παράδειγμά μας, ενώ υπάρχει ο αριθμός 0,000 3 με ένα σημαντικό ψηφίο το αποτέλεσμα 9,15 έχει τρία σημαντικά.

Παρατήρηση: πρέπει η στρογγυλοποίηση να γίνεται μιά φορά στο τέλος και όχι στα ενδιάμεσα διαδοχικά στάδια διότι το αποτέλεσμα μπορεί να διαφέρει πολύ.

π.χ $1{,}25 \times 0{,}85 \times 1{,}1 = 1{,}2$ και όχι $1{,}25 \times 0{,}85 \times 1{,}1 = 1{,}1 \times 0{,}85 = 0{,}94$

Όταν κάνομε ενδιάμεσες πράξεις να χρησιμοποιούμε τουλάχιστο δύο σημαντικά ψηφία περισσότερα από αυτά του αποτελέσματος.

Προσοχή !!

Είναι παραπλανητικό να δίνει κάποιος ένα αποτέλεσμα με περισσότερα σημαντικά ψηφία ή λιγότερα από όσα είναι ικανοποιητικά σωστά. Αυτό σε περιπτώσεις αποτελεσμάτων έρευνας θα μπορούσε να οδηγήσει σε σημαντικές παρανοήσεις για την κατανόηση των νόμων της φύσης και θα αποτελούσε οπισθοδρόμηση της ανθρώπινης γνώσης για το Σύμπαν.

Όταν οι σχέσεις είναι πολύπλοκες οι ανωτέρω κανόνες δεν είναι πάντα σωστοί. Σε αυτό το βιβλίο, θα θεωρούμε ότι τα σημαντικά ψηφία των δεδομένων φυσικών μεγεθών είναι επαρκή, ώστε το αποτέλεσμα να μπορεί να υπολογιστεί με τουλάχιστο 3 σημαντικά ψηφία, εκτός αν εκφράζεται ρητά κάτι άλλο. Φυσικά, δεν μπορέσαμε να αποφύγουμε τον πειρασμό να έχομε προβλήματα όπου για λόγους ευκολίας δίνονται αριθμητικές τιμές της μορφής $5\sqrt{2}/7$, ώστε να βγαίνουν εύκολα, στρογγυλά αποτελέσματα!